**ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**

*Ο οδηγός αυτός δημιουργήθηκε για την ευκολότερη διαχείριση του διαβάσματος και επίλυσης των ασκήσεων για το μάθημα αυτό. Σε καμία περίπτωση δεν πρέπει να αντικαταστήσει τον τρόπο διαβάσματος μιας και υπάρχουν πολλές άλλες πηγές εκεί έξω. Ωστόσο, ελπίζω με αυτόν τον οδηγό, να μπορώ να συνεισφέρω έστω και λίγο στην κατανόηση του μαθήματος και να περαστεί με το καλό!*

*Το έργο είναι community-driven. Πάντα υπάρχει χώρος για προσθήκες, αλλαγές και αφαιρέσεις (εφόσον δεν είναι απαραίτητες) και σίγουρα δεν φτάνει μόνο ένα άτομο να το κάνει αυτό. Κάθε άτομο μπορεί να συνεισφέρει έστω και λίγο στο έργο αυτό και θα δίνεται ένα credit για την συνεισφορά αυτή. Όταν θα περνιούνται οι αλλαγές και προσθήκες θα σημειώνω το όνομα αυτού.*

**CREDITS / CONTRIBUTORS**

*Headlocker*

*tardigradum*

*tassos37000*

*Developed Bug*

*Dimitrios*

*G\_P*

*Gloy*

*Hvlkk*

*Stpant*

*alright*

Περιεχόμενα

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Αριθμοί Κινητής Υποδιαστολής** 7](#_Toc125308843)

[1.1 Στρογγυλοποίηση 7](#_Toc125308844)

[1.2 Πίνακας GRS 8](#_Toc125308852)

[1.3 Εύρεση σημαντικών ψηφίων 8](#_Toc125308889)

[1.4 Έψιλον Μηχανής (εmach) 9](#_Toc125308900)

[1.5 Εύρεση απόλυτου και σχετικού σφάλματος 10](#_Toc125308915)

[1.6 Εύρεση πλήθους αριθμών μηχανής σε ένα διάστημα [a,b] 11](#_Toc125308918)

[1.7 Γενική εύρεση πλήθους αριθμών μηχανής 12](#_Toc125308925)

[1.8 Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό 13](#_Toc125308944)

[1.9 Κανονικοποιημένη Μορφή 14](#_Toc125308957)

[1.10 Ευθυγράμμιση εκθετών στις πράξεις 15](#_Toc125308971)

[1.11 Επιρροή σφάλματος στους υπολογισμούς 16](#_Toc125308977)

[1.12 Ακύρωση 18](#_Toc125308998)

[1.13 Τι πρέπει να αποφεύγουμε + Τρόποι Αντιμετώπισης 18](#_Toc125309002)

[1.14 Διάφορα Θέματα 19](#_Toc125309012)

[1.14.1 Εύρεση του (απόλυτα) μικρότερου και μεγαλύτερου αριθμού του συστήματος , έστω β = 2. 19](#_Toc125309013)

[1.14.2 Μπορεί να αναπαραστηθεί ο αριθμός x στο σύστημα Μ; Αν όχι βρείτε το απόλυτο σχετικό σφάλμα μεταξύ αυτού και του αριθμού που αποθηκεύεται στο σύστημα. 19](#_Toc125309016)

[1.14.3 Εύρεση του οριακού απόλυτου αριθμού κάτω του οποίου όλοι οι δοθέντες αριθμοί θα προσεγγίζονται από το 0 του συστήματος (underflow). 20](#_Toc125309019)[\_Toc125309020](#_Toc125309020)

[1.14.4 Αφαίρεση περίπου ίδιων αριθμών 20](#_Toc125309021)

[1.14.5 Αντιμετώπιση υπερχείλισης (overflow) 21](#_Toc125309027)

[1.14.6 Εύρεση ακριβείας και μέγιστο αριθμό ψηφίων του εκθέτη. 21](#_Toc125309033)

[1.14.7 Εύρεση αριθμών a, b, c ώστε να μην ισχύει η προσεταιρεστική ιδιότητα της πρόσθεσης (οι αριθμοί αυτοί δεν προκαλούν overflow ή undeflow). 22](#_Toc125309044)

[1.14.8 Η απόσταση του πρώτου μη μηδενικού αριθμού από το 0 (ή οποιαδήποτε άλλη τιμή) 23](#_Toc125309051)

[1.14.9 Απεικόνιση όλων των αριθμών κινητής υποδιαστολής του συστήματος Μ(β, t, L, U) που είναι μικρότεροι από κάποιον αριθμό x. 23](#_Toc125309055)

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Ανάπτυγμα Taylor και Σχήμα Horner 25**](#_Toc125309081)

[2.1 Ανάπτυγμα Taylor 25](#_Toc125309083)

[2.2 Υπόλοιπο 25](#_Toc125309087)

[2.3 Προσεγγίσεις γνωστών συναρτήσεων από το ανάπτυγμα Taylor 25](#_Toc125309091)

[2.4 Παρατηρήσεις και εφαρμογές του πολυωνύμου Taylor 26](#_Toc125309096)

[2.5 Σχήμα Horner 27](#_Toc125309106)

[2.6 Διάφορα Θέματα 28](#_Toc125309119)

[2.6.1 Εύρεση μιας τιμής της f όταν μας δίνονται στοιχεία για την τιμή της f και των παραγώγων της μιας άλλης τιμής 28](#_Toc125309120)

[2.6.2 Πόσοι τουλάχιστον όροι χρειάζονται ώστε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση f(x) μέσω του πολυωνύμου Taylor με σφάλμα που δεν ξεπερνά μια τιμή c; 33](#_Toc125309172)

[2.6.3 Εύρεση του φράγματος του σφάλματος που προκύπτει από την διαφορά της συνάρτησης και του πολυωνύμου Taylor της στο σημείο . 34](#_Toc125309188)

[2.6.4 Δοσμένου του πολυωνύμου Taylor βαθμού και της ακρίβειας , πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το ; 35](#_Toc125309199)

[2.6.5 Χρήση πολυωνύμου Taylor για την προσέγγιση της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης . 36](#_Toc125309209)

[2.6.6 Χρήση πολυωνύμου Taylor για την προσέγγιση της 2ης παραγώγου μιας συνάρτησης. 37](#_Toc125309226)

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων 38**](#_Toc125309242)

[3.1 Ταχύτητα σύγκλισης 38](#_Toc125309244)

[3.2 Μέθοδος Διχοτόμησης 40](#_Toc125309278)

[3.3 Μέθοδος Γραμμικής Παρεμβολής / Regula Falsi / Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης 42](#_Toc125309301)

[3.4 Γενική Επαναληπτική Μέθοδος (ΓΕΜ) / Μέθοδος Σταθερού Σημείου 44](#_Toc125309320)

[3.5 Επαναληπτικά σχήματα και ταχύτητα σύγκλισης 49](#_Toc125309383)

[3.6 Μέθοδος Newton-Raphson (NR) 49](#_Toc125309393)

[3.7 Η μέθοδος της Τέμνουσας (Secant Method) 52](#_Toc125309435)

[3.8 Μέθοδος Προεκβολής Aitken 54](#_Toc125309449)

[3.9 Μέθοδος Προεκβολής Steffensen 55](#_Toc125309463)

[3.10 Διάφορα Θέματα 56](#_Toc125309493)

[3.10.1 Επιλογή κατάλληλης αναδιάταξης μιας συνάρτησης f, από πλευράς ταχύτητας και σύγκλισης 56](#_Toc125309494)

[3.10.2 Εύρεση μιας προσέγγισης της ρίζας της μέσω της αναδιάταξης , επιλέγοντας κατάλληλο που θα εξασφαλίζει σύγκλιση. Δίνεται η ακριβής τιμή. 57](#_Toc125309500)

[3.10.3 Υπολογισμός της με την Μέθοδο Newton-Raphson 57](#_Toc125309506)

[3.10.4 Υπολογισμός της με την Μέθοδο της Τέμνουσας 58](#_Toc125309517)

[3.10.5 Να δείξετε ότι μια συνάρτηση αποτελεί αναδιάταξη μιας συνάρτησης () 58](#_Toc125309526)

[3.10.6 Να δείξετε ότι μια συνάρτηση πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Συστολής για και υπάρχει συνθήκη για παράμετρο έστω . 59](#_Toc125309529)

[3.10.7 Εφαρμογές σχετικές με το υπολογιστικό κόστος των NR και της Μεθόδου Τέμνουσας 61](#_Toc125309555)

[3.10.8 Χρήση της Μεθόδου NR για την εύρεση του μεγίστου μιας συνάρτησης 62](#_Toc125309571)

[3.10.9 Υπάρχει συνάρτηση και κατάλληλο διάστημα για την οποία η Μέθοδος Διχοτόμησης είναι ασυμπτωτικά ταχύτερη από την Μέθοδο NR για τη εύρεση της ρίζας με ; 63](#_Toc125309575)

[3.10.10 Δίνεται πίνακας με τις προσεγγίσεις και το σφάλμα που προέκυψε από την εκτέλεση μιας μεθόδου ή δίνονται απλά τα σφάλματα. Βρείτε την τάξη της μεθόδου ή/και βρείτε τον ασυμπτωτικό συντελεστή. 63](#_Toc125309579)

[3.10.11 Συγκεντρωτικός πίνακας μεθόδων (cheat sheet) 64](#_Toc125309584)

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – Πεπερασμένες Διαφορές και Γραμμικοί Τελεστές 65**](#_Toc125309618)

[4.1 Προς τα εμπρός διαφορές () 65](#_Toc125309620)

[4.2 Προς τα πίσω διαφορές () 65](#_Toc125309630)

[4.3 Κεντρικές διαφορές () 66](#_Toc125309638)

[4.4 Σχέσεις μεταξύ των 3 τύπων διαφορών 66](#_Toc125309648)

[4.5 Πεπερασμένες Διαφορές 67](#_Toc125309659)

[4.6 Επίδραση μεμονωμένων σφαλμάτων (γενικά) 67](#_Toc125309662)

[4.7 Γραμμικοί Τελεστές Διαφορών 68](#_Toc125309665)

[4.8 Διηρημένες Διαφορές 69](#_Toc125309683)

[4.9 Διάφορα Θέματα 70](#_Toc125309697)

[4.9.1 Εύρεση τιμής σε δοσμένο πίνακα, γνωρίζοντας ότι το πολυώνυμο είναι βαθμού 70](#_Toc125309698)

[4.9.2 Έστω ότι δίνεται ένα πολυώνυμο βαθμού που παίρνει κάποια τιμή έστω Α σε κάποια σημεία και μια άλλη τιμή έστω Β σε άλλο σημείο. Βρείτε το όπου C ένα άλλο σημείο. 72](#_Toc125309729)

[4.9.3 Δίνεται πίνακας τιμών για ένα πολυώνυμο βαθμού, στον οποίο υπάρχει σφάλμα σε μία από τις τιμές του. Βρείτε το και διορθώστε το. 72](#_Toc125309734)

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο – Πολυωνυμική Παρεμβολή 77**](#_Toc125309834)

[5.1 Ορισμός 77](#_Toc125309836)

[5.2 Πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση προς τα εμπρός διαφορών / -Νewton-Gregory (-NG) 78](#_Toc125309839)

[5.3 Πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση προς τα πίσω διαφορών / -NG 79](#_Toc125309855)

[5.4 Θεώρημα Μοναδικότητας Πολυωνύμου Παρεμβολής 80](#_Toc125309865)

[5.5 Πολυώνυμο Παρεμβολής συναρτήσει των Διηρημένων Διαφορών 81](#_Toc125309873)

[5.6 Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange 83](#_Toc125309908)

[5.7 Πολυώνυμα Chebyshev 84](#_Toc125309927)

[5.8 Φαινόμενο Runge 87](#_Toc125309969)

[5.9 Πολυώνυμο Παρεμβολής κατά Hermite 88](#_Toc125309975)

[5.10 Παρεμβολή με splines 91](#_Toc125310035)

[5.11 Splines ανώτερης τάξης 93](#_Toc125310052)

[5.12 Κυβικές splines 93](#_Toc125310056)

[5.13 Splines τύπου Hermite 98](#_Toc125310106)

[5.14 Καμπύλες Bezier 98](#_Toc125310115)

[5.15 Διάφορα Θέματα 101](#_Toc125310139)

[5.15.1 Εύρεση μέγιστου απόλυτου σφάλματος ((άνω φράγμα) 101](#_Toc125310140)

[5.15.2 Ελάχιστη μέγιστη τιμή και μέγιστο σφάλμα Chebyshev 105](#_Toc125310195)

[5.15.3 Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού αν γνωρίζουμε κάποιες τιμές διαφορών (π.χ. ή κτλπ.) 105](#_Toc125310204)

[5.15.4 Έστω ότι παρεμβάλλουμε μια συνάρτηση σε ένα διάστημα σε ένα πολυώνυμο βαθμού (σε ισαπέχοντα σημεία). Πόσο μικρό πρέπει να είναι το διάστημα ώστε το σφάλμα ; 107](#_Toc125310229)

[5.15.5 Να βρεθούν οι παράμετροι ώστε η κατά τμήματα συνάρτηση είναι (φυσική ή δεσμευμένη) κυβική spline. 108](#_Toc125310240)

[5.15.6 Να βρεθεί η (φυσική ή δεσμευμένη) κυβική spline που διέρχεται από κάποια σημεία 112](#_Toc125310307)

[5.15.7 Μια «πρακτική» μέθοδος για την εύρεση της κυβικής καμπύλης Bezier 114](#_Toc125310356)

[5.15.8 Δίνεται μια καμπύλη Bezier του χώρου. Να βρεθούν οι κόμβοι (σημεία παρεμβολής) και τα σημεία ελέγχου 117](#_Toc125310407)

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο – Αριθμητική Ολοκλήρωση 120**](#_Toc125310476)

[6.1 Εισαγωγή 121](#_Toc125310478)

[6.2 Απλός και Γενικευμένος Τύπος Τραπεζίου 122](#_Toc125310484)

[6.3 Απλός και Γενικευμένος Τύπος - Simpson 125](#_Toc125310524)

[6.4 Απλός και Γενικευμένος Τύπος – Simpson. 127](#_Toc125310555)

[6.5 Γενικές παρατηρήσεις για τις μεθόδους Τραπεζίου, – Simpson και – Simpson 129](#_Toc125310574)

[6.6 Πειραματική εύρεση ταχύτητας σύγκλισης 130](#_Toc125310586)

[6.7 Προεκβολή Richardson 131](#_Toc125310598)

[6.8 Τεχνική Romberg 133](#_Toc125310629)

[6.9 Ολοκλήρωση κατά Gauss 137](#_Toc125310691)

[6.10 Μέθοδοι Προσαρμοσμένης Ολοκλήρωσης 141](#_Toc125310748)

[6.11 Διάφορα Θέματα 143](#_Toc125310771)

[6.11.1 Εύρεση ελάχιστου πλήθους υποδιαστημάτων που απαιτούνται για την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος με σφάλμα που δεν ξεπερνάει μια τιμή . 143](#_Toc125310772)

[6.11.2 Δίνονται πληροφορίες που αφορούν τις τιμές μιας συνάρτησης (ενδεχομένως και των παραγώγων της). Να βρεθεί αριθμητικός τύπος που να προσεγγίζει το ολοκλήρωμαγια να είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι βαθμού. 145](#_Toc125310804)

[6.11.3 Ακριβής υπολογισμός ολοκληρώματος με χρήση αριθμητικού τύπου / Ποια πρέπει να χρησιμοποιήσουμε; 147](#_Toc125310827)

[6.11.4 Ολοκλήρωση Gauss-Legendre σε διάστημα 149](#_Toc125310853)

[6.11.5 Υπολογισμός πολλαπλού ολοκληρώματος με αριθμητικό τύπο ολοκλήρωσης: 150](#_Toc125310869)

[6.11.6 (Θεωρητική) Βρείτε για την οποία το ολοκλήρωμα δεν θα προσεγγιστεί ασυμπτωτικά με σφάλμα από τον Γενικευμένο Κανόνα 1/3 – Simpson. 152](#_Toc125310898)

[6.11.7 (Θεωρητική) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει τύπος της μορφής που να βρίσκει ακριβώς το ολοκλήρωμα ενός οποιουδήποτε πολυωνύμου βαθμού . 152](#_Toc125310901)

[6.11.8 Έστω ότι έχουμε μια αριθμητική μέθοδο όπου το βήμα διακριτοποίησης, η οποία προσεγγίζει την ακριβή τιμή σύμφωνα με μια δοσμένη σχέση. Για δοσμένα, , να χρησιμοποιήσετε την τεχνική Richardson ώστε να βρεθεί μια καλύτερη προσέγγιση του . 153](#_Toc125310906)

[6.11.9 (Θεωρητική) Ολοκλήρωση Romberg με αφετηρία τον Γενικευμένο Κανόνα 1/3 – Simpson. 154](#_Toc125310920)

[ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο – Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων 155](#_Toc125310929)

[7.1 Επιτρεπτές πράξεις για την επίλυση Γ.Σ. 155](#_Toc125310931)

[7.2 Μέθοδος Απαλοιφής Gauss 155](#_Toc125310936)

[7.3 Μέθοδος απαλοιφής Gauss με εναλλαγές γραμμών 157](#_Toc125310955)

[7.4 Μερική Οδήγηση 158](#_Toc125310965)

[7.5 Ολική Οδήγηση 159](#_Toc125310969)

[7.6 Μερική Οδήγηση με Στάθμιση 159](#_Toc125310975)

[7.7 Υλοποίηση των μεθόδων οδήγησης 162](#_Toc125310994)

[7.8 Εφαρμογές της μεθόδου της απαλοιφής Gauss (PLU) 162](#_Toc125310996)

[7.9 Παραγοντοποίηση Cholesky 165](#_Toc125311022)

[7.10 Πολυπλοκότητες μεθόδων για πίνακες 167](#_Toc125311049)

[7.11 Διάφορα Θέματα 167](#_Toc125311055)

[7.11.1 Χρήση του αλγορίθμου Cholesky για την απόδειξη ότι ο πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος 167](#_Toc125311056)

[7.11.2 Εύρεση στήλης αντιστρόφου του πίνακα . 167](#_Toc125311059)

[7.11.3 Εύρεση γραμμής του αντιστρόφου του . 172](#_Toc125311125)

[7.11.4 Να βρεθεί μια παράμετρος (ή παράμετροι) ώστε ο πίνακας να έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές / Δυνατές τιμές μιας παραμέτρου. 176](#_Toc125311169)

[7.11.5 Να γραφτεί ο πίνακας σε μορφή όπου κάτω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία μονάδα. 178](#_Toc125311187)

[7.11.6 Διάφοροι αλγόριθμοι και περιπτώσεις υπολογισμών πινάκων. 180](#_Toc125311221)

[7.11.7 Υπολογισμός χρόνου επίλυσης συστημάτων 185](#_Toc125311254)

[**ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο – Προβλήματα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ) 188**](#_Toc125311275)

[8.1 Προβλήματα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) 188](#_Toc125311277)

[8.2 Ύπαρξη και Μοναδικότητα 189](#_Toc125311289)

[8.3 Απλή Μέθοδος Euler 190](#_Toc125311298)

[8.4 Ευστάθεια 192](#_Toc125311324)

[8.5 Ευστάθεια Αριθμητικών Μεθόδων 193](#_Toc125311336)

[8.6 Η σημασία της ευστάθειας 193](#_Toc125311340)

[8.7 Πεπλεγμένη Euler 194](#_Toc125311344)

[8.8 H Μέθοδος του Μέσου 195](#_Toc125311350)

[8.9 Πεπλεγμένη Μέθοδος του Τραπεζίου 196](#_Toc125311362)

[8.10 Βελτιωμένη Μέθοδος Euler 196](#_Toc125311369)

[8.11 Διάφορα Θέματα 197](#_Toc125311379)

[8.11.1 Να αποδείξετε ότι η Μέθοδος του Τραπεζίου είναι Α-ευσταθής 197](#_Toc125311380)

[8.11.2 Να αποδείξετε ότι η Απλή Μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής στο 198](#_Toc125311393)

[8.11.3 Εφαρμογή Μεθόδου για επίλυση Π.Α.Τ. και στην συνέχεια με δοσμένη αναλυτική λύση αυτής να βρεθεί το σφάλμα καθώς και να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μικρύνει το h ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο μιας τιμής tol; 199](#_Toc125311408)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1ο - Αριθμοί Κινητής Υποδιαστολής

* 1. Στρογγυλοποίηση
* ***Αποκοπή*:** Αν τότε όπου τα δεκαδικά ψηφία.
* ***Στρογγυλοποίηση στο πλησιέστερο*:** Έστω π.χ. β = 10, x = .d0d1d2…10k και θέλουμε προσέγγιση σε δεκαδικά ψηφία:
  + Αν τότε  ***(στρογγυλοποίηση)***
  + Αν τότε ***(αποκοπή)***
  + Αν τότε αποφασίζουμε με βάση το
    - Αν όλα τα τότε προτιμάμε εκείνον από τους που το τελευταίο ψηφίο του είναι άρτιο.
    - Αν υπάρχει τότε επιλέγουμε τον ***(στρογγυλοποίηση)***
  1. Πίνακας GRS

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **G** | **R** | **S** | **Αποτέλεσμα** |
| 1 | 1 | 1 | Στρογγυλοποίηση |
| 0 | 1 | 1 | Αποκοπή |
| 1 | 1 | 0 | Στρογγυλοποίηση |
| 0 | 1 | 0 | Αποκοπή |
| 1 | 0 | 1 | Στρογγυλοποίηση |
| 0 | 0 | 1 | Αποκοπή |
| 1 | 0 | 0 | Στρογγυλοποίηση σε άρτιο (round to even) |
| 0 | 0 | 0 | Αποκοπή |

* 1. Εύρεση σημαντικών ψηφίων
* **Κανόνες**:
  + Οι μη μηδενικοί αριθμοί είναι πάντα σημαντικοί.
  + Τα μηδενικά μεταξύ μη μηδενικών αριθμών είναι σημαντικά.
  + Τα αρχικά (leading) ψηφία δεν είναι σημαντικά.
  + Τα τελευταία μηδενικά είναι σημαντικά αν ορίζεται το σημείο όπου υπάρχει η υποδιαστολή.
    - Παράδειγμα: 200.00 -> 5 σημαντικά ψηφία, αλλά 300 -> 1 σημαντικό ψηφίο.
* **Έστω ο αριθμός 0.021444**.
  + Τα μηδενικά πριν το 2 είναι μη σημαντικά ψηφία ενώ τα 5 επόμενα είναι τα σημαντικά ψηφία.
* **Έστω ο αριθμός 0.531002**.
  + Το μηδενικό πριν την υποδιαστολή είναι μη σημαντικό ψηφίο ενώ τα 6 επόμενα είναι σημαντικά ψηφία.
  1. Έψιλον Μηχανής (εmach)
* **Διάφοροι ορισμοί**
  + Η εξίσωση δεν έχει μοναδική λύση. Υπάρχουν πολλοί «μικροί» αριθμοί του συστήματος με
    - = βάση
    - = ακρίβεια
    - = μικρότερος εκθέτης
    - = μεγαλύτερος εκθέτης

που είναι μεγαλύτεροι από τον απόλυτα μικρότερο αριθμό του, για τους οποίους επαληθεύεται η εξίσωση. Το όριο αυτό, δηλαδή ο αριθμός κάτω του οποίου όλοι οι αριθμοί του Μ δεν επηρεάζουν το άθροισμα ονομάζεται **έψιλον μηχανής ().**

* + **~~Το είναι η μισή απόσταση (διαφορά) μεταξύ του 1 και του αμέσως μεγαλύτερου αριθμού του συστήματος.~~**
  + **~~Το είναι το μέγιστο σχετικό σφάλμα κατά την απεικόνιση ενός αριθμού από αριθμό μηχανής.~~**
  + Tο έψιλον μηχανής ή ορίζεται ως η απόσταση μεταξύ του 1 και του επόμενου αριθμού μηχανής του συστήματος. Στην βιβλιογραφία συχνά αναφέρεται και μια άλλη ποσότητα ένδειξης ακρίβειας ενός συστήματος κ.υ: το μοναδιαίο σφάλμα στρογγύλευσης (unit roundoff) ***u*** για ο οποίο ισχύει:

* Ισχύει ότι
* **Εύρεση εmach**:

* 1. Εύρεση απόλυτου και σχετικού σφάλματος
* **Απόλυτο σφάλμα =**
* **Απόλυτο σχετικό σφάλμα =** 
  1. Εύρεση πλήθους αριθμών μηχανής σε ένα διάστημα [a,b]
* Έστω ότι σε ένα σύστημα κινητής υποδιαστολής, οι αριθμοί απεικονίζονται με έναν τύπο, έστω όπου t η ακρίβεια των ψηφίων στο κλασματικό μέρος και z ο μέγιστος αριθμός ψηφίων στον εκθέτη.
* Εκφράζουμε τους αριθμούς και με βάση τον τύπο του συστήματος.
* Για κάθε πρόσημο του εκθέτη έχουμε αριθμούς μηχανής.
  + Οι «διαθέσιμοι» εκθέτες είναι ο εκθέτης που παρουσιάζεται στην απεικόνιση του a μέχρι τον εκθέτη που παρουσιάζεται στην απεικόνιση του .
* Άρα θέλουμε αριθμούς για κάθε «διαθέσιμο» εκθέτη + 1 αριθμό για τον τελευταίο εκθέτη (ο εκθέτης που παρουσιάζεται στην απεικόνιση του b). Δηλαδή:
  + Πλήθος αριθμών μηχανής = όπου ο συνολικός αριθμός των «διαθέσιμων» εκθετών.
  1. Γενική εύρεση πλήθους αριθμών μηχανής
* Έστω ότι μας δίνεται ένα σύστημα όπου οι αριθμοί απεικονίζονται ως όπου .
* **1ος Τρόπος**:
  + Στον αριθμό κάθε ψηφίο (ακόμα και το 1) αντιστοιχούν σε μια τιμή με βάση την βάση του συστήματος, οι τιμές των οποίων πολλαπλασιάζονται μεταξύ τους και μας δίνουν το αποτέλεσμα . Συγκεκριμένα:

…

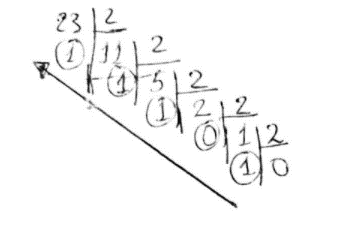
* + Για κάθε εκθέτη e μετράμε πόσους εκθέτες έχουμε στο

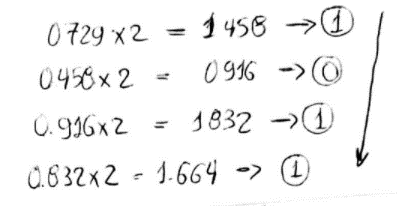
. Έστω ότι αυτή η τιμή ισούται με j.

* + - Άρα αριθμοί.
  + Θετικοί και αρνητικοί αριθμοί:
  + Προσθέτουμε +1 στο παραπάνω αποτέλεσμα που είναι το μηδέν.
  + Τελικά το πλήθος αριθμών μηχανής θα ισούται με

.

* **2ος Τρόπος**:
  + Πλήθος εκθετών =

* + όπου το συμβολίζει τους θετικούς και αρνητικούς αριθμούς και το το μηδέν.
  + Τελικά το πλήθος των αριθμών μηχανής είναι .
  1. Μετατροπή δεκαδικού αριθμού σε δυαδικό
* Χωρίζουμε το ακέραιο μέρος από το κλασματικό και εκφράζουμε το καθένα στο δυαδικό σύστημα.
* **Ακέραιο μέρος**: Κλασική παρουσίαση στο δυαδικό σύστημα, διαιρώντας το ακέραιο μέρος με το 2 κρατώντας το υπόλοιπο. Η απεικόνιση ξεκινάει από το τελευταίο υπόλοιπο προς το πρώτο.
* **Κλασματικό Μέρος**:
  + Πολλαπλασιάζουμε το κλασματικό μέρος με το 2:
    - Αν το αποτέλεσμα είναι μεγαλύτερο της μονάδας τότε κρατάμε τον αριθμό 1 και μειώνουμε το αποτέλεσμα κατά 1.
    - Αλλιώς κρατάμε το 0 και συνεχίζουμε τον πολλαπλασιασμό μέχρι το αποτέλεσμα να είναι μεγαλύτερο της μονάδας.
  + Η απεικόνιση του αριθμού ξεκινά από τον πρώτο υπολογισμό μέχρι τον «τελευταίο» (μπορεί ο αριθμός να είναι περιοδικός ή να «περιορίζεται» από την ακρίβεια του συστήματος).
* **Παράδειγμα**: Έστω ότι έχουμε τον αριθμό :
  + **Ακέραιο μέρος**:
  + **Κλασματικό μέρος**:



* + **Προσοχή**: αν ο αριθμός που μας δίνεται είναι κλάσμα το κρατάμε ως κλάσμα!
  + Άρα
  1. Κανονικοποιημένη Μορφή
* **Μετακίνηση προς τα δεξιά τόσα ψηφία όσα έχει το ακέραιο μέρος** (στο παρακάτω παράδειγμα 2, δηλαδή 2 ψηφία δεξιά):



**1ο ψηφίο κλασματικό ≠ 0**

**Ακέραιο μέρος = 0**

* **Μετακίνηση προς τα αριστερά τόσα ψηφία μέχρι το 1ο κλασματικό ψηφίο να είναι διάφορο του μηδενός** (στο παρακάτω παράδειγμα -4, δηλαδή 4 ψηφία αριστερά):

* **«Ειδική» περίπτωση για δυαδικό σύστημα (β = 2)**, όπου το ακέραιο μέρος είναι **πάντα** 1:

**Ακέραιο μέρος = 1**

***Εφόσον πρέπει να έχουμε μονάδα στο ακέραιο μέρος, πρέπει να μετακινήσουμε τα ψηφία άλλη μια θέση αριστερά πέρα από την μέχρι τώρα μετακίνηση που έκανε το 1ο κλασματικό ψηφίο διάφορο του 0.***

**4 3 2 1 0**



**4 3 2 1 0**

* 1. Ευθυγράμμιση εκθετών στις πράξεις
* Επιλέγουμε τον αριθμό με τον μικρότερο εκθέτη και μετακινούμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά ώστε οι αριθμοί να αποκτήσουν κοινό εκθέτη.
  + **Παράδειγμα**: Έστω ότι έχουμε τους αριθμούς και και θέλουμε να εκτελέσουμε την πράξη με ακρίβεια 5 δεκαδικών ψηφίων (δ.ψ)
  + Ο έχει μικρότερο εκθέτη (0), άρα πρέπει να μετακινήσουμε την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά όσο ο εκθέτης του , εδώ 3.
  + Άρα:

**3 θέσεις αριστερά**

* + Επομένως

**≠ 0, άρα στρογγυλοποίηση πάνω**

* 1. Επιρροή σφάλματος στους υπολογισμούς
* Θέλουμε να εκτιμήσουμε την απόλυτη τιμή του σχετικού σφάλματος με και \* μια πράξη (+, -, x, /).

∃ ε ∊ [-εmach, εmach]

* Γενικά

**(1)**

**(1)**



* Έστω με i = 1, 2,…,n με . Τότε:

**(2)**

* + Υπάρχει με τέτοιο ώστε



όπου ( με )

* + Και τελικά ισχύει το **(2)**
* **Μελέτη της περίπτωσης του πολλαπλασιασμού με βάση το παραπάνω θεώρημα**:

* + με

*(ουσιαστικά το ε3 είναι πολύ πολύ μικρό οπότε μπορούμε να πούμε ότι κάνει ε2*

* + (λόγω της παρατήρησης, έπεται επίσης ότι μπορούμε να «αγνοήσομε» τον πολύ μικρό όρο ). Επίσης ισχύει ότι οπότε
  + Άρα
* **Μελέτη της περίπτωσης της πρόσθεσης**:

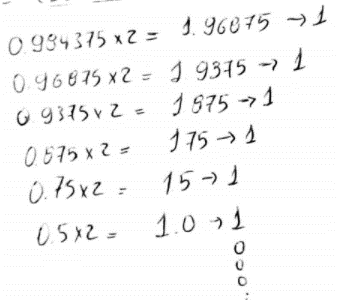
* + με
  + Άρα οπότε:

* 1. Ακύρωση
* Αν ομόσημοι αριθμοί τότε το φράγμα της πρόσθεσης είναι περίπου ίσο με
* Aν ετερόσημοι αριθμοί τότε ισχύει
* Αν ο παρανομαστής γίνεται πολύ μικρός ενώ ο αριθμητής είναι αρκετά μεγάλος σε σχέση με τον παρανομαστή που ενδέχεται να έχει κινδύνους.
  1. Τι πρέπει να αποφεύγουμε + Τρόποι Αντιμετώπισης
* **Αποφεύγουμε**:
  + Πρόσθεση ή αφαίρεση ενός απόλυτα πολύ μικρού αριθμού σε έναν απόλυτα πολύ μεγάλο προς αυτόν αριθμό.
    - Παράδειγμα: Αυτό συμβαίνει όταν έχουμε να υπολογίσουμε το άθροισμα με n αρκετά μεγάλο ή στον ανατοκισμό μέσω του τύπου με n το πλήθος ανατοκισμών και i το επιτόκιο.
  + Αφαίρεση δύο αριθμών περίπου ίδιου μεγέθους, για παράδειγμα , για μικρό .
* **Τρόποι Αντιμετώπισης**
  + Μετασχηματισμός της παράστασης σε άλλη ισοδύναμη, για παράδειγμα .
  + Προσέγγιση της παράστασης από άλλες πιο ευσταθείς, για παράδειγμα με χρήση αναπτύγματος Taylor.
  + Αθροίζοντας με διαφορετική σειρά.
  + Συζυγείς παραστάσεις.
  1. Διάφορα Θέματα
     1. **Εύρεση του (απόλυτα) μικρότερου και μεγαλύτερου** αριθμού του συστήματος , έστω β = 2.

* για και με .

* για και με .
  + 1. **Μπορεί να αναπαραστηθεί ο αριθμός x στο σύστημα Μ; Αν** όχι βρείτε το απόλυτο σχετικό σφάλμα μεταξύ αυτού και του αριθμού που αποθηκεύεται στο σύστημα.
* Παρουσιάζουμε τον αριθμό με βάση το σύστημα Μ και αφού κάνουμε κανονικοποίηση, ελέγχουμε αν ισχύει .
* Αν δεν ισχύει τότε: όπου ο αριθμός όπως παρουσιάζεται στο σύστημα και η πραγματική τιμή.
  + 1. Εύρεση του οριακού απόλυτου αριθμού κάτω του οποίου όλοι οι δοθέντες αριθμοί θα προσεγγίζονται από το 0 του συστήματος (underflow).
* Απλώς βρίσκουμε τον απόλυτα μικρότερο αριθμό του συστήματος.
  + 1. Αφαίρεση περίπου ίδιων αριθμών
* Θα το δούμε μέσω παραδείγματος:
* **Παράδειγμα:** *Το ακριβές αποτέλεσμα της πράξης είναι 1.6662 x 10-3. Να υπολογίσετε το αποτέλεσμα της πράξης σε ένα σύστημα που έχει την δυνατότητα αποθήκευσης 3 σημαντικών ψηφίων. Στην συνέχεια προτείνετε τρόπο που θα υπολογίζει την παραπάνω πράξη με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια. Δίνεται .*
  + Το με 3 σημαντικά ψηφία γίνεται 3.00. Αφαιρώντας 3.00 λαμβάνουμε το 0.00, δηλαδή αριθμό με κανένα σημαντικό ψηφίο, αφού αφαιρούμε 2 αριθμούς περίπου ίδιου μεγέθους.
  + Χρησιμοποιούμε συζυγή παράσταση και για να υπολογίσουμε το αποτέλεσμα της πράξης με την μεγαλύτερη δυνατή ακρίβεια:

* + 1. Αντιμετώπιση υπερχείλισης (overflow)
* Θα το δούμε μέσω παραδείγματος:
* **Παράδειγμα**: *Υποθέστε ότι η παράσταση μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς αλλά το προκαλεί υπερχείλιση. Να γράψετε σε ισοδύναμη μορφή την ώστε να μπορεί να υπολογιστεί. Ποιο θα είναι το αποτέλεσμα αν ;*

* + Αν τότε επειδή θα έχουμε και στην συνέχεια .
    1. Εύρεση ακριβείας και μέγιστο αριθμό ψηφίων του εκθέτη.
* Εφόσον μας δίνεται ο απόλυτα μεγαλύτερος αριθμός του συστήματος που απεικονίζει τους αριθμούς της ως (εδώ δυαδικό σύστημα), τον απεικονίζουμε στο σύστημα μας και τον κανονικοποιούμε.
* Ανάλογα με το αποτέλεσμα που προέκυψε από την μετακίνηση των ψηφίων κατά την κανονικοποίηση βρίσκουμε την ακρίβεια t. Ο μέγιστος αριθμός ψηφίων του εκθέτη k, υπολογίζεται με βάση το πλήθος των ψηφίων που απεικονίζεται ο εκθέτης με βάση του σύστημα μας.
* **Παράδειγμα**: Έστω ότι .
  + **Ακέραιο μέρος**:  *[συνεχής διαίρεση με το 2, κρατάμε τα υπόλοιπα και απεικονίζουμε από το τελευταίο υπόλοιπο προς το πρώτο, όπως είδαμε]*
  + **Κλασματικό μέρος:**

**x 20**

**6 ψηφία**

* + Άρα και έχουμε ότι και

**11 ψηφία (t)**

.

* + Ο αριθμός 5 του εκθέτη απεικονίζεται ως 101 άρα
    1. Εύρεση αριθμών a, b, c ώστε να μην ισχύει η προσεταιρεστική ιδιότητα της πρόσθεσης (οι αριθμοί αυτοί δεν προκαλούν overflow ή undeflow).
* Καλές επιλογές είναι οι και .

**≠**



* **Σημείωση δημιουργών**: Λόγω του νέου ορισμού του έψιλον μηχανής, το αντικαταστάθηκε από το .
  + 1. Η απόσταση του πρώτου μη μηδενικού αριθμού από το 0 (ή οποιαδήποτε άλλη τιμή)
* Εύρεση του .
* Έστω (ή οποιαδήποτε άλλος αριθμός):
  + **Απόσταση**:
    1. Απεικόνιση όλων των αριθμών κινητής υποδιαστολής του συστήματος Μ(β, t, L, U) που είναι μικρότεροι από κάποιον αριθμό x.
* Ο αριθμός που απεικονίζεται στο σύστημα με βάση τον τύπο του τρόπου αναπαράστασης αριθμών σε σύστημα, για παράδειγμα .
* Αφού βρούμε τον εκθέτη του αριθμού τότε για κάθε εκθέτη στο παρουσιάζουμε όλους τους αριθμούς που δημιουργούνται με αυτόν τον εκθέτη, από τον μικρότερο αριθμό μέχρι τον μεγαλύτερο.
* Παίρνουμε αριθμούς με ίδιο εκθέτη μόνο εάν ο δοσμένος αριθμός έχει κάποιο decimal μεγαλύτερο του 0.
  + **Παράδειγμα**: Για θα πρέπει να απαριθμήσουμε και την περίπτωση: και κοκ.
* **Παράδειγμα**: Έστω και θέλουμε να βρούμε όλους τους αριθμούς που είναι μικρότεροι από το .
  + Ο αριθμός απεικονίζεται ως
  + Άρα θα βρούμε όλους τους αριθμούς με εκθέτη .
  + :

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο – Ανάπτυγμα Taylor και Σχήμα Horner

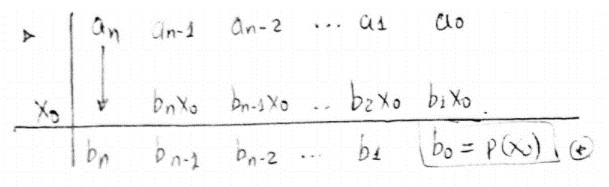
1. 1. Ανάπτυγμα Taylor

* Έστω σε ένα διάστημα που περιέχει το σημείο . Τότε όπου και .
* Όταν τότε το ανάπτυγμα αναφέρεται ως *Maclaurin.*
* Το ανάπτυγμα Taylor είναι μια τοπική προσέγγιση της .
  1. Υπόλοιπο
* Έστω και . Τότε για κάθε υπάρχει ένας αριθμός τέτοιο ώστε: όπου:

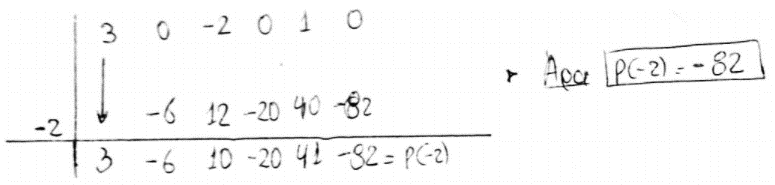
* 1. Προσεγγίσεις γνωστών συναρτήσεων από το ανάπτυγμα Taylor

* 1. Παρατηρήσεις και εφαρμογές του πολυωνύμου Taylor
* Όπως προαναφέρθηκε, η προσέγγιση με το πολυώνυμο Taylor είναι τοπική. Παίρνει πληροφορίες για την και τις παραγώγους αυτής σε ένα συγκεκριμένο σημείο και προσπαθεί να την προσεγγίσει παντού. Όσο πλησιέστερα είμαστε στο σημείο αυτό τόσο μικρότερο ενδέχεται να απαιτηθεί για μια καλή προσέγγιση.
* Αν η συνάρτηση δεν είναι τόσο ομαλή, ο βαθμός του πολυωνύμου και άρα το υπόλοιπο επηρεάζεται ανάλογα. Γι’ αυτό απαιτείται ότι .
* Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε την σε ένα διάστημα από ένα πολυώνυμο το οποίο πουθενά δεν θα «απέχει» περισσότερο από από την.
  + Ζητάμε .
  + Τότε αρκεί να απαιτήσουμε για το υπόλοιπο να πληροί την σχέση
* Η σειρά Taylor μιας συνάρτησης μπορεί να ερμηνεύσει την ασυμπτωτική συμπεριφορά της. Μπορεί να αιτιολογήσει γιατί π.χ.

* 1. Σχήμα Horner
* Έστω ότι έχουμε το πολυώνυμο .
  + Με το σχήμα Horner μπορούμε να υπολογίσουμε τις τιμές και τις παραγώγους ενός πολυωνύμου κάνοντας πολλαπλασιασμούς (αντί για ) και προσθέσεις.

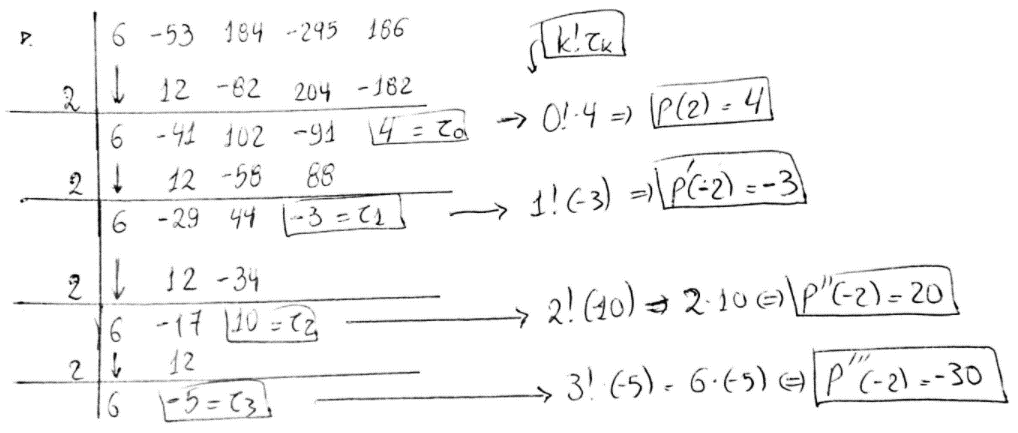


* Παράδειγμα: Έστω . Να βρεθεί το .



* Για τον υπολογισμό του (κ-οστή παράγωγος του στο χρησιμοποιούμε τον τύπο:

* + όπου η τιμή του που βρίσκουμε στο τέλος της κ-οστής επανάληψης του αλγόριθμου Horner. *(\* στο παραπάνω σχήμα)*
* Παράδειγμα: *Έστω . Να υπολογιστούν με το σχήμα Horner τα .*



**p’(2) = -3**

**p’’(2) = 20**

**p’’’(2) = 30**

* 1. Διάφορα Θέματα
     1. Εύρεση μιας τιμής της f όταν μας δίνονται στοιχεία για την τιμή της f και των παραγώγων της μιας άλλης τιμής
* Έστω ότι μας είναι γνωστές οι τιμές της και των παραγώγων της για μια τιμή έστω , δηλαδή και ότι οι ανώτερες παράγωγοι της f σε αυτό το σημείο είναι 0.
  + Οι ανώτερες παράγωγοι θα είναι οι παράγωγοι της μετά την τελευταία δοσμένη τιμή παραγώγου, δηλαδή αν π.χ. δίνονται οι τιμές της μέχρι την τότε όλες οι 3ες και άνω παράγωγοι είναι 0.
* Για να βρούμε την τιμή της ενός άλλου σημείου, έστω (δίνεται διάστημα ) κάνουμε τα εξής:
  + Χρήση πολυωνύμου Taylor στο με και

.

* + Εύρεση της τιμής μέσω του πολυωνύμου Taylor και κατάλληλων αντικαταστάσεων.
* Υπάρχουν αρκετές παραλλαγές, για παράδειγμα να ζητηθεί η τιμή της παραγωγού έστω . Πράττουμε ανάλογα!
* Παράδειγμα 1: *Έστω ότι μας δίνονται οι επόμενες τιμές για μια συνάρτηση : και ότι οι ανώτερες παράγωγοι της στο είναι 0. Υποθέτοντας ότι η συνάρτηση και όλες οι παράγωγοι της υπάρχουν και είναι συνεχείς στο διάστημα , να βρείτε την .*
  + Εφαρμόζουμε τον ανάπτυγμα Taylor στο με και (5 – 3).

* Παράδειγμα 2: *Η συνάρτηση είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα [1,5] και ισχύει ότι , και ενώ όλες οι παράγωγοι τάξης μεγαλύτερης του 2 της στο 1 είναι 0. Να βρείτε το .*
  + Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα Taylor στο με και (5 – 1)

* Παράδειγμα 3: *Η συνάρτηση είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα [0,2] και ισχύει ότι , και ενώ όλες οι παράγωγοι τάξης μεγαλύτερης του 2 της στο 2 είναι 0. Να βρείτε το .*
  + Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα Taylor στο με και (2 – 0)

* Παράδειγμα 4: *Η συνάρτηση είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα [-1,1] και ισχύει ότι , και ενώ η 3η και όλες οι παράγωγοι τάξης μεγαλύτερης του 3 της στο 1 είναι 0. Να βρείτε το .*
  + Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα Taylor στο με και (1 – (-1))

* Παράδειγμα 5: *Η συνάρτηση είναι άπειρες φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στο διάστημα [-2,2] και ισχύει ότι , και ενώ η 3η και όλες οι παράγωγοι τάξης μεγαλύτερης του 3 της στο 2 είναι 0. Να βρείτε το .*
  + Εφαρμόζουμε το ανάπτυγμα Taylor στο με και (2 – (-2))

* + 1. Πόσοι τουλάχιστον όροι χρειάζονται ώστε να προσεγγίσουμε μια συνάρτηση f(x) μέσω του πολυωνύμου Taylor με σφάλμα που δεν ξεπερνά μια τιμή c;
* Ουσιαστικά ζητείται να βρούμε την ελάχιστη τιμή του .
* Πρέπει να λύσουμε την ανίσωση .
  + Για την εύρεση του , , πρέπει να βρούμε το μέγιστο αυτής της παραγώγου. Ένας τρόπος για να το βρούμε είναι μελετήσουμε την μονοτονία της.
  + Προς το τέλος της επίλυσης της ανίσωσης θα έχουμε τον άγνωστο μας σε παραγοντικό. Ο πιο «εύκολος» τρόπος να βρούμε αυτό το είναι να δοκιμάσουμε τιμές για αυτήν ώστε να ικανοποιούν την τελική συνθήκη.
* Παράδειγμα: *Έστω ότι θέλουμε να προσεγγίσουμε τον αριθμό με σφάλμα που δεν θα ξεπερνά το 0.1. Πόσους όρους του πολυωνύμου Taylor πρέπει να πάρουμε;*
  + Έστω

* + Βρίσκουμε το μέγιστο της συνάρτησης:

* + - στο
  + Λύνουμε την ανίσωση

* + Αν πάρουμε το τότε το θα είναι μεγαλύτερο του 27.18281828 αφού *5! = 120.*
    1. Εύρεση του φράγματος του σφάλματος που προκύπτει από την διαφορά της συνάρτησης και του πολυωνύμου Taylor της στο σημείο .
* Αφού βρούμε το πολυώνυμο Taylor βαθμού της δοσμένης συνάρτησης χρησιμοποιούμε τον τύπο του υπολοίπου: .
* Παράδειγμα: *Βρείτε ένα άνω φράγμα του σφάλματος που προκύπτει από την προσέγγιση της συνάρτησης από το πολυώνυμο Taylor του βαθμού 2, στο για .*
  + Βρίσκουμε το πολυώνυμο Taylor της για :

* + - .
  + 3η παράγωγος της :
  + Βρίσκουμε το μέγιστο της στο διάστημα :
    - Η είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση σε όλο το γενικά, άρα θα είναι και γνησίως αύξουσα στο υποσύνολο της .
    - Έτσι, το μέγιστο της θα είναι το
  + Υπόλοιπο:

* + 1. Δοσμένου του πολυωνύμου Taylor βαθμού και της ακρίβειας , πόσο μεγάλο πρέπει να είναι το ;
* Χρησιμοποιούμε τον τύπο του υπολοίπου και λύνουμε την ανίσωση ως προς .
* Παράδειγμα: *Έστω . Χρησιμοποιώντας το πολυώνυμο Taylor βαθμού 5 στο για την εκτίμηση του με ακρίβεια 0.0005, πόσο μεγάλο μπορεί να είναι το ;*

* + Το είναι φραγμένο στο και είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα αυτό. Άρα το μέγιστο της είναι το 1.



* + Άρα η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το είναι περίπου 0.8434.
    1. Χρήση πολυωνύμου Taylor για την προσέγγιση της 1ης παραγώγου μιας συνάρτησης .
* Πρέπει να αποδείξουμε ότι
* Χρησιμοποιούμε το πολυώνυμο Taylor στα και για .

με ()



με ()

* Αφαίρεση των και :

* Τελικά:

* Παρόμοια διαδικασία ακολουθούμε αν ζητηθεί ως

για

* + 1. Χρήση πολυωνύμου Taylor για την προσέγγιση της 2ης παραγώγου μιας συνάρτησης.
* Πρέπει να δείξουμε ότι:
* Εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor στα και για :

με ()



με ()

* Προσθέτουμε κατά μέλη:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο – Αριθμητική Επίλυση Εξισώσεων

1. 1. Ταχύτητα σύγκλισης

* Μια επαναληπτική μέθοδος είναι τάξης σύγκλισης αν:

* + Το ονομάζεται *ρυθμός σύγκλισης* ή *ασυμπτωτική σταθερά σφάλματος* και είναι ανεξάρτητη του .
  + Για να υπάρξει *σύγκλιση* πρέπει .
* Εκφράζουμε τον παραπάνω τύπο ως , όσο . Προφανώς όσο μεγαλύτερο είναι το , τόσο μικρότερο το και συγκλίνει πιο γρήγορα η ακολουθία.
* Μερικές Περιπτώσεις:
  + Αν και , δηλαδή τότε:
    - Αν τότε η σύγκλιση είναι *υπογραμμική*.
    - Αν , τότε η σύγκλιση είναι *γραμμική* με *ρυθμό σύγκλισης* .
    - Αν , τότε η σύγκλιση είναι *υπεργραμμική*.
  + Αν , , , τότε η σύγκλιση είναι *τετραγωνική*.
  + Αν, , , τότε η σύγκλιση είναι *κυβική*.
* Παραδείγματα:
  + Έστω η ακολουθία :

* + - Άρα η ακολουθία , συγκλίνει στο 0 γραμμικά () και με ρυθμό (.
  + Έστω η ακολουθία :

*L’Hopital*

* + - Άρα η ακολουθία , συγκλίνει στο 0 υπογραμμικά () επειδή ο ρυθμός είναι .
  + Έστω η ακολουθία

:

* + - Άρα η ακολουθία , συγκλίνει τετραγωνικά

() με ρυθμό σύγκλισης .

* + Έστω η ακολουθία

:

* + - Άρα η ακολουθία , συγκλίνει γραμμικά () με ρυθμό σύγκλισης .
  1. Μέθοδος Διχοτόμησης
* Στηρίζεται στο Θεώρημα Bolzano, δηλαδή αν η συνάρτηση είναι συνεχής στο και τότε η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο .
* Διχοτομούμε επαναληπτικά το διάστημα και παίρνουμε ως νέα το μέσο και το ένα από τα δύο άκρα του διαστήματος, ώστε να έχουμε πάντα εγκλωβισμένη την ρίζα που ψάχνουμε μέσα σε αυτό και έτσι θα οδηγηθούμε στην ρίζα της στο .
* Η μέθοδος διχοτόμησης συγκλίνει γραμμικά () με ρυθμό σύγκλισης . Άρα η σύγκλιση είναι αργή και σε κάθε βήμα το σφάλμα υποδιπλασιάζεται.
* Πλεονεκτήματα:
  + Η ταχύτητα της δεν εξαρτάται από τις αναλυτικές ιδιότητες της (π.χ. αν είναι παραγωγίσιμη ή όχι).
  + Η μέθοδος είναι ευσταθής αλλά συγκλίνει πάντα.
* Μειονέκτημα:
  + Αν η έχει περισσότερες από μία ρίζες, τότε η μέθοδος βρίσκει μόνο μία απ’ αυτές.
* Εύρεση των αριθμών των επαναλήψεων που θα χρειαστούν για τον προσδιορισμό της ρίζας με ακρίβεια :
  + Είτε βρίσκουμε το αποτέλεσμα της πράξης .
  + Είτε λύνουμε την ανίσωση . *(οδηγούμαστε πρακτικά στο πάνω αποτέλεσμα)*
* Αλγόριθμος:
  1. Θέσε .
  2. Αν τότε η λύση είναι , αλλιώς επίστρεψε .
  3. Αν , θέσε , αλλιώς .
  4. Πήγαινε στο βήμα 1.
* Παρατηρήσεις:
  + Είναι προτιμότερο να χρησιμοποιούμε το

παρά το .

* + Για λόγους ευστάθειας υπολογίζουμε το ως

παρά .

* + Αν τότε είναι πιθανό να οδηγηθούμε σε ατέρμων βρόγχο. Πάντα θα πρέπει να εξετάζεται μετά τον υπολογισμό του αν ισχύει η ισότητα
  1. Μέθοδος Γραμμικής Παρεμβολής / Regula Falsi / Μέθοδος Εσφαλμένης Θέσης
* Αντί να πάρουμε μια νέα προσέγγιση στο μέσο του διαστήματος

, παίρνουμε την ρίζα ενός γραμμικού πολυωνύμου παρεμβολής με σημεία παρεμβολής τα άκρα του εκάστοτε διαστήματος.

* Έστω ότι το , περιέχει μια μόνο ρίζα , απλής ή περιττής πολλαπλότητας της εξίσωσης . Τότε .
* Οι *προσεγγίσεις της μεθόδου* ορίζονται ως εξής:
  + Ορίζουμε πρώτα το γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής που διέρχεται από τα δηλαδή:

* + - και βρίσκουμε την ρίζα αυτού, δηλαδή .
  + Αν , το είναι η ρίζα που ζητάμε, αλλιώς θέτουμε:

* + - και , αν

* + - και , αν

και η διαδικασία συνεχίζεται έως ότου πάρουμε μια καλή προσέγγιση της ρίζας που ζητάμε.

* Ο *αλγόριθμος* της δίνεται από την επαναληπτική σχέση:

* + με

όπου τα είναι προηγούμενες (όχι απαραίτητα διαδοχικές) τιμές από τις επαναλήψεις της μεθόδου για τις οποίες ισχύει ότι περιέχουν την άγνωστη ρίζα, δηλαδή .

* Θέωρημα: *Έστω ότι , , η μοναδική ρίζα της στο και στο .*
  + *Αν ή τότε η ακολουθία συγκλίνει στην ρίζα .*
  + *Το ίδιο ισχύει αν ή , για την ακολουθία .*
* Η *τάξη σύγκλισης* της Regula Falsi είναι γραμμική ( όπως και της διχοτόμησης αλλά ελπίζουμε ότι ο ασυμπτωτικός συντελεστής είναι μικρότερος του (μιας και ο σκοπός της Regula Falsi είναι να βελτιώσει την μέθοδο της διχοτόμησης). Ωστόσο δεν είναι αληθές γενικά ότι η μέθοδος αυτή είναι ταχύτερη της μεθόδου διχοτόμησης.
  + Αν για παράδειγμα έχουμε την συνάρτηση με , τότε η Regula Falsi είναι ταχύτερη της μεθόδου διχοτόμησης με ασυμπτωτικό συντελεστή .
  1. Γενική Επαναληπτική Μέθοδος (ΓΕΜ) / Μέθοδος Σταθερού Σημείου
* Κάθε εξίσωση της μορφής μπορεί πάντα να γραφεί ως μια αναδιάταξη της μορφής (π.χ. ). Οι πιθανές αναδιατάξεις είναι άπειρες.
  + Για παράδειγμα, η εξίσωση μπορεί να γραφεί ως:

    - , αν
* Ορισμός σταθερού σημείου: Ένα σημείο του πεδίου ορισμού της , λέγεται *σταθερό σημείο* όταν ισχύει .
* Για να βρούμε τα σταθερά σημεία μιας , λύνουμε την εξίσωση
  + Η είναι αναδιάταξη της , δηλαδή εκεί όπου η έχει ρίζες, η έχει σταθερά σημεία.
* Γραφική Παράσταση

Όπου είναι αναδιάταξη της

* Μια συνάρτηση μπορεί να έχει ή να μην έχει σταθερά σημεία. Αν έχει μπορεί να είναι 1 ή περισσότερα, Μπορεί σε κάποιο διάστημα του πεδίου ορισμού της να έχει και σε κάποιο άλλο όχι.
* Για την δημιουργία επαναληπτικών μεθόδων εύρεσης της ρίζας της εξίσωσης την γράφουμε στην μορφή και ξεκινώντας από μία αρχική τιμή υπολογίζουμε την ακολουθία προσεγγίσεων από την σχέση .
* Αν η ακολουθία είναι συγκλίνουσα και η συνεχής τότε η συγκλίνει στο σταθερό σημείο της . Ανάλογα με τον τρόπο με τον οποίο προκύπτει η από την , διακρίνουμε διάφορες επαναληπτικές μεθόδους. Άρα η ΓΕΜ είναι μια γεννήτρια αλγορίθμων.
* **Θεώρημα ύπαρξης σταθερού σημείου**: *Κάθε συνεχής συνάρτηση έχει στο διάστημα τουλάχιστον ένα σταθερό σημείο.*
  + Απόδειξη:
    - ή ή ( και )
    - Έστω με η οποία είναι και συνεχής.
    - και
    - Εφόσον λοιπόν ισχύει το Θεώρημα Bolzano, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον τέτοιο ώστε
    - Άρα υπάρχει σταθερό σημείο.
* Το θεώρημα αυτό αποτελεί μια ικανή αλλά όχι και αναγκαία συνθήκη, δηλαδή υπάρχουν περιπτώσεις όπου δεν ισχύει το θεώρημα και όμως υπάρχει σταθερό σημείο.
  + Παράδειγμα: με η οποία έχει 2 σταθερά σημεία τα και .
* Συνθήκη Lipschitz και ορισμός συστολής:
  + Μια συνάρτηση πληροί την *συνθήκη του Lipschitz*, αν υπάρχει σταθερά τέτοια ώστε:

, .

* + Αν η σταθερά μπορεί να επιλεχθεί μικρότερη της μονάδας, τότε λέγεται *συστολή* στο .
  + Παρατήρηση: Όλες οι συναρτήσεις (συνεχώς παραγωγίσιμες) ικανοποιούν την συνθήκη Lipschitz. Αν είναι δεν μας εξασφαλίζει.
    - Παράδειγμα: , ⇒

* + - Αν τότε
* Θεώρημα Σύγκλισης ΓΕΜ 1: *Έστω το γενικό επαναληπτικό σχήμα και ότι στο κλειστό διάστημα η είναι συστολή με σταθερά Lipschitz . Αν για την αρχική τιμή προσέγγιση ισχύει (1) τότε:*
  + *Όλες οι παραγόμενες επαναλήψεις ανήκουν στο διάστημα*

* + *Το είναι σταθερό σημείο της ή αλλιώς ρίζα της και είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της*

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και όταν η προϋπόθεση για την συνέχεια Lipschitz της με στο αντικατασταθεί από το στο . Επίσης αποδεικνύει ότι η έχει σταθερό σημείο στο και «χαλαρώνει» την προϋπόθεση ότι η .

* Θεώρημα Σύγκλισης ΓΕΜ 2: *Έστω ένα επαναληπτικό σχήμα το οποίο έχει σταθερό σημείο στο κλειστό διάστημα*

*και πληροί την σχέση*

*με . (2) Τότε:*

* + *Για οποιοδήποτε , όλες οι παραγόμενες επαναλήψεις ανήκουν στο διάστημα*

* + *Το είναι το μοναδικό σταθερό σημείο της ή αλλιώς ρίζα της στο .*

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και όταν η προϋπόθεση (2) για την συνέχεια Lipschitz της με στο αντικατασταθεί από το στο . Τώρα όμως πρέπει να γνωρίζουμε ότι το σταθερό σημείο ανήκει στο . To κέρδος που αποκομίζουμε είναι ότι όλες οι επαναλήψεις θα ανήκουν στο χωρίς να χρειάζεται να επιβεβαιωθεί η (1). Έτσι λοιπόν δεν απαιτούμε την σχέση (1).

* Θεώρημα Συστολής: *Έστω μια συστολή με σταθερά . Τότε η έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο . Για τυχαία αρχική τιμή η παραγόμενη ακολουθία είναι καλώς ορισμένη και συγκλίνει προς το ().*
  + Απόδειξη:
    - Η ύπαρξη εξασφαλίζεται από το [*Θεώρημα Ύπαρξης Σταθερού Σημείου*](#ΘΥΣΣ).
    - Μοναδικότητα: Έστω ότι εκτός από το υπάρχει ένα ακόμη σταθερό σημείο οπότε ισχύει με .
      * Τότε: το οποίο είναι άτοπο!
    - Η είναι καλώς ορισμένη καθώς :

…

* Για τα θεωρήματα ΓΕΜ 1,2 και το Θεώρημα Συστολής, στην περίπτωση που τότε η ακολουθία μπορεί να συγκλίνει μπορεί και όχι.
* Εκτίμηση σφάλματος: Όταν ισχύουν τα Θεωρήματα ΓΕΜ 1,2 και Συστολής για τα σφάλματα ισχύουν οι σχέσεις:

* + εκτιμά το τελικό σφάλμα από το 1ο βήμα.

* + εκτιμά το σφάλμα από το τελευταίο βήμα. Πιο ακριβής εκτίμηση από την πρώτη σχέση.
  1. Επαναληπτικά σχήματα και ταχύτητα σύγκλισης
* Υποθέτοντας ότι η είναι παραγωγίσιμη στο που περιέχει τη ρίζα, τότε από το Θεώρημα Μέσης Τιμής (Θ.Μ.Τ.), υπάρχει μεταξύ του και της ρίζας της έτσι ώστε:

* Αν η ακολουθία τότε όταν . Τότε και λόγω της συνέχειας της θα ισχύει:

* + *()* 
    - Αν , τότε η μέθοδος *αποκλίνει*.
    - Αν , τότε η μέθοδος *συγκλίνει γραμμικά* ()
    - Αν τότε συγκλίνει *υπεργραμμικά* ().
      * Αν , αλλά τότε συγκλίνει *τετραγωνικά* ().
      * Αν , αλλά τότε συγκλίνει *κυβικά* (). κ.ο.κ.
  1. Μέθοδος Newton-Raphson (NR)
* Η μέθοδος NR δεν εξαρτάται από κάποια αναδιάταξη της παρά μόνο από την ίδια, την παράγωγο της και την αρχική προσέγγιση . Υπάρχει πάντα διάστημα που περικλείει την ρίζα ώστε αν επιλεγεί το από κει, η μέθοδος να συγκλίνει στην ρίζα. Το διάστημα αυτό, που εξαρτάται από την ρίζα και την συνάρτηση, μπορεί να είναι πολύ μικρό.
* Αλγόριθμος NR: : με .
* Αναλυτική Ερμηνεία NR μέσω του Αναπτύγματος Taylor:
  + Εφόσον τότε για κάθε :

**(1)**

* + (ρίζα της , δηλαδή )
  + Από το (1) έχουμε:

**τείνει στο 0**

**NR**

* Η μέθοδος NR είναι μια ειδικής μορφής ΓΕΜ:
* Θεώρημα: *Αν η είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε μια περιοχή και τότε .*
  + Απόδειξη:

* + - άρα υπάρχει διάστημα που περιέχει το ώστε.
* Κατασκευή συνάρτησης με ρίζα πολλαπλότητας :

με

* Παραλλαγή της NR: *Έστω ρίζα πολλαπλότητας της με , και η είναι φορές παραγωγίσιμη. Τότε έχουμε*:

**(2)**

**(1)**



* + Από τα (1) και (2) έχουμε:

* + Ασυμπτωτικός συντελεστής για την παραλλαγή NR:

Όριο για

τάξη

* Σύγκλιση και ασυμπτωτικός συντελεστής NR: *Έστω απλή ρίζα της και η είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα που περιέχει το . Τότε η τάξη σύγκλισης της NR είναι τετραγωνική () και για την ασυμπτωτική ταχύτητα (συντελεστή) της μεθόδου ισχύει .*
  + Απόδειξη:

**Ανάπτυγμα**

**Taylor**

**(1)**



* + - Παίρνουμε όριο για ,όπου και

* + - Ωστόσο όπως είδαμε, όταν η ρίζα είναι πολλαπλότητας , η σύγκλιση είναι γραμμική με ασυμπτωτική ταχύτητα . Για να κρατήσουμε την σύγκλιση τετραγωνική, χρησιμοποιούμε την παραλλαγή της NR.
  1. Η μέθοδος της Τέμνουσας (Secant Method)
* Στην μέθοδο NR, χρειαζόμαστε σε κάθε βήμα 1 υπολογισμό της και
  + Συνολικό Κόστος = Αριθμός Επαναλήψεων + Κόστος Επαναλήψεων
* Η μέθοδος της Τέμνουσας χρησιμοποιεί τον ίδιο συλλογισμό και αλγόριθμο με αυτό της NR μόνο που στην θέση της χρησιμοποιεί την προσέγγιση της .
  + Άρα ο τύπος NR μετασχηματίζεται σε

* Όπως και στη NR έτσι και στη μέθοδος της τέμνουσας, η σύγκλιση εξαρτάται από το πόσο κοντά βρισκόμαστε στην ρίζα.
* Επειδή χρησιμοποιεί προσέγγιση της παραγώγου, η μέθοδος Τέμνουσας θα είναι πιο αργή σε σύγκλιση σε σχέση με την NR. Αποδεικνύεται ότι η τάξη της μεθόδου είναι υπεργραμμική και συγκεκριμένα για απλή ρίζα.
* Και οι δύο μέθοδοι χρησιμοποιούνται για το ραφινάρισμα των προσεγγίσεων που έχουμε λάβει από άλλες τεχνικές, όπως για παράδειγμα η μέθοδος της Διχοτόμησης.
* Σύγκριση υπολογιστικού κόστους NR και Τέμνουσας:
  + Έστω ότι χρειάζεται το ίδιο πλήθος flops για τον υπολογισμό της με αυτό της έστω . Τότε σε κάθε επανάληψη η NR θέλει flops ενώ η τέμνουσα flops ανά επανάληψη.

* + - NR:
    - Τέμνουσα:

* 1. Μέθοδος Προεκβολής Aitken
* Με την μέθοδο αυτή επιταχύνουμε ακολουθίες που συγκλίνουν γραμμικά.
* Έστω η ακολουθία που συγκλίνει γραμμικά στο και υποθέτουμε ότι . Από την σχέση αυτή παίρνουμε:

* Χρησιμοποιούμε ως την σχέση που βρήκαμε πριν δηλαδή:

…

* + Άρα , για .
  + προς τα εμπρός διαφορά
* Θεώρημα: *Έστω ότι η συγκλίνει γραμμικά στο και ότι . Τότε η συγκλίνει στο ταχύτερα (όχι απαραίτητα τετραγωνικά) απ’ ότι η καθώς .*
* Ισχύει και γενικά, αλλά αν τα δύο αρχικά δίνονται ευθέως τότε εκτελούμε κανονικά τον αλγόριθμο, αλλιώς χρησιμοποιούμε τα άκρα του δοσμένου διαστήματος .
  1. Μέθοδος Προεκβολής Steffensen
* Έστω ότι η ακολουθία συγκλίνει γραμμικά στο .
* Για την ακολουθία :

* + βάζει στον τύπο του Aitken τις τιμές .

* + βάζει στον τύπο του Aitken τις τιμές .
* Έστω (, με γραμμική σύγκλιση)
  + Με χρήση της μεθόδου Aitken έχουμε:

* + Μέθοδος Steffensen:

* + - * …
* Αλγόριθμος Μεθόδου Steffensen:

Όσο //αριθμοί επαναλήψεων

//

//

// Aitken,

Αν τότε // = ακρίβεια

Επίστρεψε

Τέλος\_αν

Τέλος\_επανάληψης

* Θεώρημα: *Έστω ότι έχει λύση το με . Αν υπάρχει τέτοιο ώστε , τότε η μέθοδος Steffensen δίνει τετραγωνικής σύγκλισης ακολουθία για κάθε .*
  1. Διάφορα Θέματα
     1. Επιλογή κατάλληλης αναδιάταξης μιας συνάρτησης f, από πλευράς ταχύτητας και σύγκλισης
  + Έστω ότι για μια συνάρτηση , στην οποία θέλουμε να λύσουμε την εξίσωση και δίνονται αναδιατάξεις αυτής, σύμφωνα με την ΓΕΜ .
  + Για να βρούμε ποια από αυτές είναι η προτιμητέα από πλευράς ταχύτητας κα σύγκλισης ακολουθούμε τα εξής βήματα:
    1. Βρίσκουμε το σταθερό σημείο, έστω , μέσω της εξίσωσης .
    2. Θέτουμε ως , την αναδιάταξη, την παραγωγίζουμε και ελέγχουμε αν ισχύει με βάση αυτά που είδαμε στο κεφάλαιο 3.5.
    3. Ταχύτερη θα είναι αυτή που τείνει στο 0.
    4. Εύρεση μιας προσέγγισης της ρίζας της μέσω της αναδιάταξης , επιλέγοντας κατάλληλο που θα εξασφαλίζει σύγκλιση. Δίνεται η ακριβής τιμή.
* Πρέπει να βρούμε ένα διάστημα από ΄που μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλο για επίτευξη σύγκλισης και έπειτα να εκτελέσουμε τον αλγόριθμο ξεκινώντας με το .
* Για να το πετύχουμε αυτό, λύνουμε την ανίσωση .
* Σε περίπτωση που προκύψει ένωση διαστημάτων, π.χ. τότε επιλέγουμε το διάστημα που περιέχει την τιμή που θέλουμε να προσεγγίσουμε.
  + Για παράδειγμα, αν θέλουμε να προσεγγίσουμε την και έχουμε διάστημα της μορφής επιλέγουμε από το .
* Με αυτό το , εκτελούμε επαναλήψεις.
  + 1. Υπολογισμός της με την Μέθοδο Newton-Raphson
* Θέτουμε

* + ,
* Αντικαθιστούμε στον αλγόριθμο του NR:

* Παράδειγμα: Αν έχουμε την τότε:
* Αν μας δίνεται το εκτελούμε κανονικά τον αλγόριθμο με βάση το αλλιώς ακολουθούμε τα βήματα που είδαμε στο 3.10.2.
  + 1. Υπολογισμός της με την Μέθοδο της Τέμνουσας
* Έστω .
* Αντικαθιστούμε στον αλγόριθμο της Μεθόδου Τέμνουσας:

* + 1. Να δείξετε ότι μια συνάρτηση αποτελεί αναδιάταξη μιας συνάρτησης ()
* Λύνουμε την εξίσωση , ώστε να καταλήξουμε στην εξίσωση .
  + Έτσι επίσης αποδεικνύουμε ότι η έχει μοναδικό σταθερό σημείο στο με .
    1. Να δείξετε ότι μια συνάρτηση πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Συστολής για και υπάρχει συνθήκη για παράμετρο έστω .
* Θα το δείξουμε με παράδειγμα.
* Παράδειγμα: Να δείξετε ότι η πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος Συστολής για αν

* + - Αν τότε , δηλαδή η θα αποκλίνει, άρα σίγουρα .
  + Συστολή:

* + - Θέτουμε και αφού μελετήσουμε την μονοτονία της στο βρίσκουμε ότι το. Άρα .
    - Για να είναι η συστολή πρέπει

      * Θέτουμε
    - Θέλουμε .
      * Δεδομένου ότι θα πρέπει άρα:

Θέτουμε και αφού μελετήσουμε την μονοτονία της στο

βρίσκουμε ότι , άρα .



Θέτουμε και εδώ και με βάση την μονοτονία αυτής παρατηρούμε ότι η μέγιστη τιμή αυτής είναι 16.

* + - * Αν είχαμε υποθέσει ότι τότε που απορρίπτεται ενώ αν τότε που απορρίπτεται.
      * Θέλουμε οπότε .
    1. Εφαρμογές σχετικές με το υπολογιστικό κόστος των NR και της Μεθόδου Τέμνουσας
* Παράδειγμα 1: *Έστω η απλή ρίζα της . Για την προσέγγιση της ρίζας με την ίδια αρχική τιμή και το ίδιο απόλυτο σφάλμα, χρησιμοποιήθηκε η μέθοδος Newton-Raphson και η Μέθοδος της Τέμνουσας. Αν το κόστος υπολογισμού της είναι πράξεις και της πράξεις, να υπολογισθεί ο λόγος του συνολικού κόστος της μεθόδου NR προς αυτό της Μεθόδου της Τέμνουσας*.
  + Για την μέθοδο NR, ένας υπολογισμός και απαιτεί πράξεις.
    - Τάξη σύγκλισης:
  + Για την μέθοδο της Τέμνουσας, ένας υπολογισμός (το έχει υπολογιστεί στο προηγούμενο βήμα) απαιτεί πράξεις.
    - Τάξη σύγκλισης:
  + Συνεπώς 2 επαναλήψεις της NR μειώνουν το σφάλμα όσο περίπου 3 επαναλήψεις της Τέμνουσας διότι:

* Παράδειγμα 2: *Για την εύρεση της μοναδικής ρίζας μιας συνάρτησης γνωρίζουμε ότι οι μέθοδοι Newton αλλά και αυτή της Τέμνουσας συγκλίνουν για αρχικό και αντίστοιχα. Αν ο υπολογισμός της απαιτεί 30% παραπάνω χρόνο έναντι της , ποια μέθοδος είναι ασυμπτωτικά ταχύτερη;*
  + Έστω ότι η απαιτεί flops και το flops.
  + Newton: flops, με τάξη σύγκλισης .
  + Τέμνουσα: flops, με τάξη σύγκλισης .

* + άρα 2 επαναλήψεις Newton μειώνουν το σφάλμα όσο περίπου 3 επαναλήψεις της Τέμνουσας.

* + - , άρα η Τέμνουσα είναι ταχύτερη κατά περίπου 1.53 φορές.
    1. Χρήση της Μεθόδου NR για την εύρεση του μεγίστου μιας συνάρτησης
* Με βάση το θεώρημα Fermat, το μέγιστο της συνάρτησης είναι η ρίζα της .
  + Άρα πρέπει να εφαρμόσουμε την μέθοδο στην , δηλαδή: .
* Μπορούμε να αποδείξουμε ότι το μέγιστο αυτό είναι μοναδικό εφαρμόζοντας πρώτα το Θεώρημα Bolzano και έπειτα μελετώντας την
  + 1. Υπάρχει συνάρτηση και κατάλληλο διάστημα για την οποία η Μέθοδος Διχοτόμησης είναι ασυμπτωτικά ταχύτερη από την Μέθοδο NR για τη εύρεση της ρίζας με ;
* Ξέρουμε ότι η μέθοδος NR έχει πάντα ασυμπτωτικά τετραγωνική σύγκλιση στην ρίζα εκτός και αν η ρίζα έχει πολλαπλότητα ή η δεν είναι 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη γύρω απ’αυτή, οπότε έχουμε γραμμική σύγκλιση.
  + Θυμίζουμε ότι όταν η ρίζα είναι πολλαπλότητας , η μέθοδος NR έχει ασυμπτωτικό συντελεστή .
* Εφόσον η μέθοδος διχοτόμησης έχει γραμμική σύγκλιση με ασυμπτωτικό συντελεστή αρκεί να επιλέξουμε ως μια συνάρτηση που να έχει π.χ. την ρίζα τριπλή.
  + 1. Δίνεται πίνακας με τις προσεγγίσεις και το σφάλμα που προέκυψε από την εκτέλεση μιας μεθόδου ή δίνονται απλά τα σφάλματα. Βρείτε την τάξη της μεθόδου ή/και βρείτε τον ασυμπτωτικό συντελεστή.
* Χρησιμοποιούμε τον τύπο .
* Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε την συμπεριφορά των συνεχόμενων σφαλμάτων .
  + Μπορεί για παράδειγμα να δούμε ότι το σφάλμα υποδιπλασιάζεται σε κάθε επάναληψη.
  + Έτσι βρίσκουμε την τάξη της μεθόδου.
    1. Συγκεντρωτικός πίνακας μεθόδων (cheat sheet)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Μέθοδος | Ταχύτητα  Σύγκλισης | Ασυμπτωτικός  Συντελεστής |
| Διχοτόμηση |  |  |
| Regula Falsi |  | * *,* για ειδικές συναρτήσεις, π.χ. |
| ΓΕΜ (για ) |  |  |
| ΓΕΜ (για ) |  | , |
| Newton-Raphson (απλή ρίζα) |  |  |
| Newton-Raphson (πολλαπλή ρίζα) | 1 |  |
| Παραλλαγή  Newton-Raphson |  |  |
| Τέμνουσα |  |  |

* Aitken: Δοθέντος μιας ακολουθίας με τάξη και ασυμπτωτικό συντελεστή την μετατρέπουμε σε ακολουθία με και , συγκεκριμένα .
* Steffensen: Δοθέντος μιας ακολουθίας με τάξη την μετατρέπουμε σε ακολουθία με , δηλαδή από γραμμική σύγκλιση σε τετραγωνική.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – Πεπερασμένες Διαφορές και Γραμμικοί Τελεστές

1. 1. Προς τα εμπρός διαφορές ()

* Έστω ότι μας δίνονται οι τιμές μιας συνάρτησης σε κάποια σημεία . Τα σημεία αυτά είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα με , με και .

* Οι πρώτες προς τα εμπρός διαφορές ορίζονται από την σχέση:
* Οι δεύτερες προς τα εμπρός διαφορές ορίζονται από την σχέση:

* Επαγωγικά, ορίζονται οι προς τα εμπρός διαφορές από την σχέση:

* 1. Προς τα πίσω διαφορές ()
* Οι πρώτες προς τα πίσω διαφορές ορίζονται από την σχέση:
* Οι δεύτερες προς τα πίσω διαφορές ορίζονται από την σχέση:

* Επαγωγικά ορίζονται οι προς τα πίσω διαφορές από την σχέση:

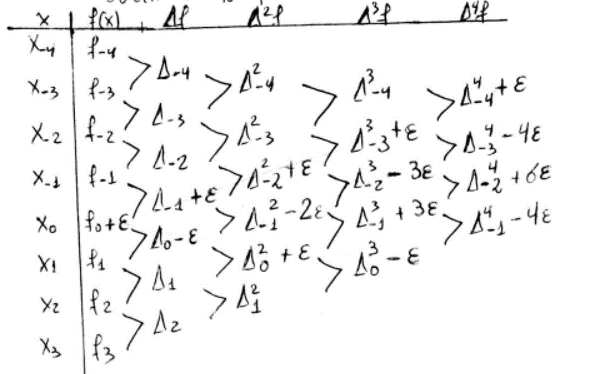
* 1. Κεντρικές διαφορές ()
* Οι πρώτες κεντρικές διαφορές ορίζονται από την σχέση:
* Οι δεύτερες κεντρικές διαφορές ορίζονται από την σχέση:

* Οι κεντρικές διαφορές περιττής τάξης ορίζονται επαγωγικά από την σχέση:

* Οι κεντρικές διαφορές άρτιας τάξης ορίζονται επαγωγικά από την σχέση:

* 1. Σχέσεις μεταξύ των 3 τύπων διαφορών
* Από τον ορισμό εξάγεται η επόμενη σχέση που συνδέει τους 3 τύπους διαφορών: ή γενικά .
* Θεώρημα: Οι διαφορές n-τάξης ενός πολυώνυμου βαθμού είναι σταθερές και ίσες με όπου ο συντελεστής του μεγιστοβάθμιου όρου και το βήμα διακριτοποίησης.
  + Απόδειξη:
    - Έστω .

* 1. Πεπερασμένες Διαφορές
* Οι διαφορές και ανώτερης τάξης ενός πολυωνύμου βαθμού είναι ίσες με 0.
* Το αντίστροφο αληθεύει επίσης δηλαδή αν όλες οι διαφορές μιας συνάρτησης είναι ίσες με 0, τότε η συνάρτηση είναι πολυώνυμο ακριβώς βαθμού.
  1. Επίδραση μεμονωμένων σφαλμάτων (γενικά)
* Υποθέτουμε ότι στην τιμή υπάρχει σφάλμα ίσο με .



* 1. Γραμμικοί Τελεστές Διαφορών
* Σύμβολα σαν τα που εφαρμόζονται σε συναρτήσεις ονομάζονται *τελεστές*.
  + Τελεστής Μετατόπισης :
  + Τελεστής Παραγώγου :
  + Τελεστής μέσου όρου :
  + Τελεστής προς τα εμπρός διαφοράς :
  + Τελεστής προς τα πίσω διαφοράς :
  + Τελεστής κεντρικής διαφοράς :
  + Μοναδιαίος τελεστής :
* Ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:
  + :
  + :

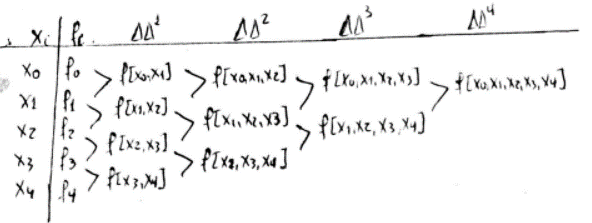
* + :



* 1. Διηρημένες Διαφορές
* Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση είναι πινακοποιημένη στα διακεκριμένα (γενικά μη ισαπέχοντα) σημεία με αντίστοιχες τιμές τα .
* Οι διηρημένες διαφορές ορίζονται επαγωγικά:
  + Μηδενικής Τάξης:
  + 1ης Τάξης:
  + 2ης Τάξης:

…

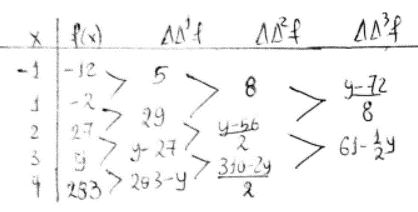
* + n-οστής τάξης:
* Πίνακας Διηρημένων Διαφορών:



* Παρατηρήσεις:
  + Η είναι μια συμμετρική συνάρτηση των σημείων που σημαίνει ότι δεν μεταβάλλεται με οποιαδήποτε μετάθεση αυτών, π.χ. .
  + Ισχύει:
  + Αν τα σημεία είναι ισαπέχοντα, δηλαδή τότε ισχύει:
  1. Διάφορα Θέματα
     1. Εύρεση τιμής σε δοσμένο πίνακα, γνωρίζοντας ότι το πολυώνυμο είναι βαθμού
* Ανεξαρτήτως του αν τα σημεία είναι ισαπέχοντα ή όχι, οι διαφορές τάξης όπως είδαμε θα είναι σταθερές (δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο μιας και το πολυώνυμο δεν μας δίνεται)
* Πρέπει να φτιάξουμε έναν πίνακα διαφορών και για την άγνωστη τιμή έστω να λύσουμε κάποια εξίσωση, ανάλογα με το που βρίσκεται.
* Παράδειγμα: *Να βρείτε την τιμή του παρακάτω πίνακα αν γνωρίζετε ότι η είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|  | -12 | -2 | 27 | \* | 283 |

* + Τα σημεία δεν είναι ισαπέχοντα και το πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού, άρα οι διηρημένες διαφορές 3ης τάξης () είναι σταθερές. (\*)
  + Πίνακας Διαφορών:



* + (\*)

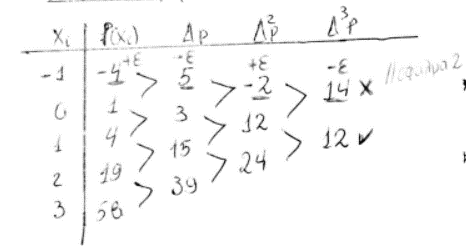
* + 1. Έστω ότι δίνεται ένα πολυώνυμο βαθμού που παίρνει κάποια τιμή έστω Α σε κάποια σημεία και μια άλλη τιμή έστω Β σε άλλο σημείο. Βρείτε το όπου C ένα άλλο σημείο.
* Σ’ αυτές τις ασκήσεις, συνήθως ζητείται να βρούμε μία από τις ακριανές τιμές, δηλαδή είτε την πρώτη είτε την τελευταία τιμή από τις δοσμένες ενδιάμεσες.
* Υπάρχουν 2 τρόποι να εργαστούμε:
  1. Όπως και στο 4.9.1 θέτοντας την άγνωστη τιμή ως και με τον πίνακα διαφορών να καταλήξουμε σε μια εξίσωση (συνήθως η εξίσωση θα προέρχεται από την συνθήκη ότι οι διαφορές τάξης είναι σταθερές και ίσες μεταξύ τους)
  2. Βρίσκοντας το πολυώνυμο παρεμβολής και μέσω αυτής να βρούμε το . Θα το δούμε αργότερα.
     1. Δίνεται πίνακας τιμών για ένα πολυώνυμο βαθμού, στον οποίο υπάρχει σφάλμα σε μία από τις τιμές του. Βρείτε το και διορθώστε το.
* Υπάρχει περίπτωση να μας δίνεται και ο μεγιστοβάθμιος όρος του πολυωνύμου οπότε έχοντας υπόψη ότι έχουμε πολυώνυμο βαθμού, οι διαφορές τάξης θα είναι σταθερές και ίσες με . Επίσης οι διαφορές τάξης είναι 0.
* Δημιουργούμε τον πίνακα διαφορών και κάνουμε τους απαραίτητους υπολογισμούς.
* Υπάρχουν 3 περιπτώσεις για το που βρίσκεται αυτό το σφάλμα:
  + Αν μια τελική τιμή είναι σωστή και άλλη λάθος, το σφάλμα (λάθος αρχική τιμή) είναι η μία από τις 2 ακραίες (αυτή που βρίσκεται στην ίδια πλευρά με την λάθος πλευρά).
  + Αν και οι δύο τελικές τιμές είναι λάθος με το ίδιο όμως σφάλμα τότε η λάθος αρχική τιμή είναι η κεντρική.
  + Αλλιώς η λάθος αρχική τιμή είναι κάποια από τις ενδιάμεσες (αυτή που βρίσκεται στην ίδια πλευρά με το μέγιστο τελικό σφάλμα).
* Παράδειγμα 1: *Για ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού με μεγιστοβάθμιο όρο 2 έχουμε τον παρακάτω πίνακα τιμών*.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | -4 | 1 | 4 | 19 | 58 |

*Βρείτε το σφάλμα και διορθώστε το*.

* + Το είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα οι διαφορές είναι σταθερές (χρησιμοποιούμε προς τα εμπρός διαφορές μιας και τα σημεία είναι ισαπέχοντα) και ίσες με

* + Πίνακας Διαφορών:



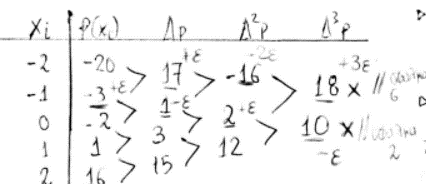
* + - Μια από τις δύο τελικές τιμές είναι λάθος μιας και δεν συμφωνεί με την συνθήκη .
    - Άρα έχουμε την 1η περίπτωση, όπου μια από τις ακραίες τιμές είναι λάθος, εδώ είναι η τιμή .
  + Για να βρούμε το αρκεί να λύσουμε την εξίσωση:

* + Άρα η σωστή τιμή για το είναι:

* Παράδειγμα 2: *Για ένα πολυώνυμο 3ου βαθμού με μεγιστοβάμιο όρο 2 έχουμε τον επόμενο πίνακα τιμών.*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |
|  | -20 | -3 | -2 | 1 | 16 |

*Βρείτε το και διορθώστε το.*

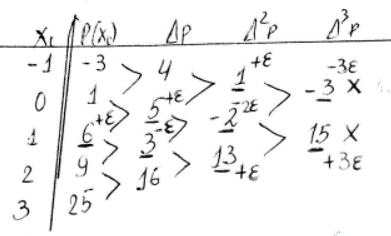
* + Το είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα οι διαφορές είναι σταθερές και ίσες με
  + Πίνακας Διαφορών:
    - Και οι δύο τελικές τιμές είναι λάθος μιας και δεν συμφωνούν με την συνθήκη . Τα σφάλματα δεν είναι ίσα μεταξύ τους.
    - Άρα έχουμε την 3η περίπτωση, όπου μια από τις ενδιάμεσες τιμές (είτε η είτε η ) είναι λάθος. Η «σωστή» λανθασμένη τιμή βρίσκεται στην πλευρά με το μέγιστο τελικό σφάλμα.
  + Αυτό συμβαίνει στην τελική τιμή 18, άρα η λανθασμένη αρχική τιμή είναι η .
  + Λύνουμε την εξίσωση
  + Άρα η σωστή τιμή για το είναι:

* Παράδειγμα 3: *Έστω πολυώνυμο 3ου βαθμού με μεγιστοβάθμιο όρο 1, με τον παρακάτω πίνακα τιμών*:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|  | -3 | 1 | 6 | 9 | 25 |

*Βρείτε το σφάλμα και διορθώστε το.*

* To πολυώνυμο είναι 3ου βαθμού άρα οι διαφορές θα είναι σταθερές και ίσες με
* Πίνακας Διαφορών:



* + Οι τελικές τιμές δεν συμφωνούν με την συνθήκη .
  + Άρα είμαστε στην 2η περίπτωση που σημαίνει ότι η ενδιάμεση τιμή είναι λάθος.
* Λύνουμε την εξίσωση:

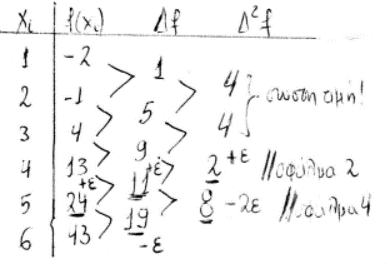
* + Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την εξίσωση .
* Άρα η σωστή τιμή για την είναι:

* Παράδειγμα 4: *Έστω πολυώνυμο 2ου βαθμού με τον παρακάτω πίνακα τιμών*:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|  | -2 | -1 | 4 | 13 | 24 | 43 |

*Βρείτε το σφάλμα και διορθώστε το*.

* + Το πολυώνυμο είναι 2ου βαθμού άρα οι διαφορές θα είναι σταθερές.
  + Πίνακας Διαφορών:

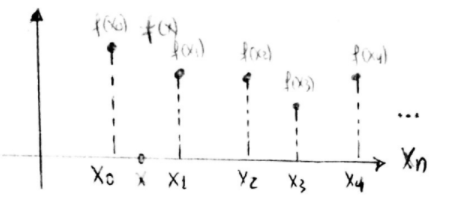


* + - Στις τελικές τιμές μόνο η τιμή 4 είναι σωστή με την οποία πρέπει να ισούνται όλες οι (). Ωστόσο οι τιμές 2 και 8 δεν συμφωνούν με την συνθήκη αυτή, άρα πρέπει να βρούμε την λανθασμένη τιμή.
    - Εφόσον στην τιμή 8 έχουμε μεγαλύτερο σφάλμα, η λανθασμένη τιμή είναι η ενδιάμεση τιμή .
  + Λύνουμε την εξίσωση: .
  + Τελικά:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5ο – Πολυωνυμική Παρεμβολή

1. 1. Ορισμός

* Έστω για την οποία γνωρίζουμε τα , (πινακοποιημένες τιμές)
  + *Πολυωνυμική Παρεμβολή* είναι η εύρεση ενός πολυωνύμου το πολύ βαθμού που διέρχεται από τα σημεία .
  1. Πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση προς τα εμπρός διαφορών / -Νewton-Gregory (-NG)
* Έστω ότι θέλουμε να βρούμε την , δηλαδή πόσο κάνει η για την τιμή . Έστω επίσης ότι γνωρίζουμε την , όπου το είναι ένα από τα ισαπέχοντα σημεία που γνωρίζουμε για αυτήν.
  + , με .



* Χρησιμοποιώντας λογισμό τελεστών λαμβάνουμε διαδοχικά:

Όπου ο όρος καλείται διόρθωση.

* Συνεπώς: (-NG)
* Παρατηρήσεις:
  + Αν η είναι πολυώνυμο τότε όπου ο βαθμός του.
  + Η παρούσα παρεμβολή για εφαρμόζεται αποτελεσματικότερα στην αρχή ενός πίνακα και τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε περισσότερες τιμές της .
  + Αν προστεθεί επιπλέον σημείο, οι υπολογισμοί χρειάζεται να γίνουν από την αρχή.
  + Η τεχνική μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για αρνητικές τιμές του καθώς και για τιμές του μεγαλύτερες της μονάδας. Στις περιπτώσεις αυτές όμως άλλοι τύποι παρεμβολής δίνουν καλύτερα αποτελέσματα.
* Θεώρημα: *Αν η είναι πολυώνυμο βαθμού τότε ταυτίζεται με το πολυώνυμο παρεμβολής σε οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία.*
  1. Πολυώνυμο παρεμβολής με χρήση προς τα πίσω διαφορών / -NG
* Έστω τα ισαπέχοντα σημεία στα οποία θέλουμε να βρούμε το πολυώνυμο παρεμβολής.
  + Θέτουμε ,
    - όταν .



*και στα 2 μέλη*

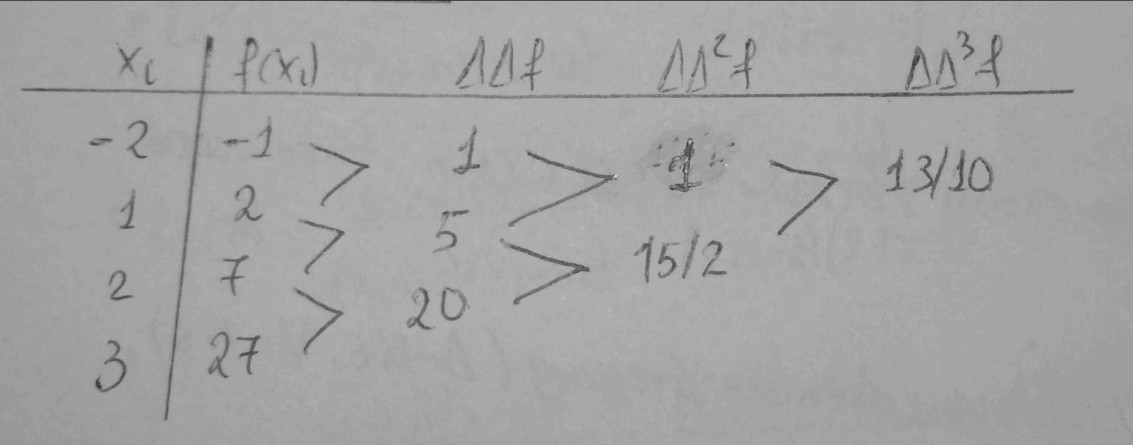
* + Οι παρατηρήσεις της ισχύουν ατόφιες και εδώ με την μόνη διαφοροποίηση να είναι ότι η παρούσα παρεμβολή εφαρμόζεται καλύτερα στο τέλος ενός πίνακα.
  1. Θεώρημα Μοναδικότητας Πολυωνύμου Παρεμβολής
* Θεώρημα: *Έστω οποιαδήποτε σημεία παρεμβολής. Υπάρχει ένα και μοναδικό πολυώνυμο βαθμού που διέρχεται από αυτά*.
  + Απόδειξη:
    - Η ύπαρξη (τουλάχιστον για τα ισαπέχοντα σημεία) εξασφαλίζεται από το πολυώνυμο παρεμβολής Newton-Gregory.
    - Μοναδικότητα: Έστω ότι υπάρχει και άλλο πολυώυνμο παρεμβολής βαθμού που διέρχεται από τα ίδια σημεία . Έστω αυτό το πολυώνυμο.
      * Τότε το είναι πολυώνυμο το πολύ βαθμού.
      * Όμως το ισούται με 0 στα σημεία με αφού (στα έχουμε παρεμβολή).
      * Συνεπώς το έχει παραπάνω ρίζες από τον βαθμό του. Άρα .
  1. Πολυώνυμο Παρεμβολής συναρτήσει των Διηρημένων Διαφορών
* Έστω , τα σημεία από τα οποία θέλουμε να «περάσουμε» το πολυώνυμο παρεμβολής. Το πολυώνυμο αυτό δίνεται συναρτήσει των Διηρημένων Διαφορών από τον τύπο:

* Όταν τα σημεία ισαπέχουν, τότε οι τύποι Newton-Gregory και ο παραπάνω συμπίπτουν. Η διόρθωση δίνεται από την σχέση:

* Παρατηρήσεις:
  + Η μέθοδος αυτή μπορεί να εφαρμοστεί και σε μη ισαπέχοντα σημεία.
  + Αν προστεθεί επιπλέον σημείο παρεμβολής, οι πράξεις δεν γίνονται από την αρχή.
  + Στον πίνακα , τα μπορούν να μπουν σε τυχαία σειρά.
* Παράδειγμα: Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής-ΔΔ με βάση τον παρακάτω πίνακα:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | -2 | 1 | 2 | 3 |
|  | -1 | 2 | 7 | 27 |

* + Έχουμε 4 σημεία παρεμβολής άρα (το πολύ) θα είναι ο βαθμός του πολυωνύμου .
  + Πίνακας Διαφορών:



* + Newton-ΔΔ:

* 1. Πολυώνυμο Παρεμβολής Lagrange
* Όπως και στην παρεμβολή Newton-ΔΔ, δεν απαιτούνται τα γνωστά σημεία της να είναι ισαπέχοντα.
* Θέλουμε ένα όπου , .

* + , όπου πολυώνυμο βαθμού.
  + : όπου
  + Το είναι πολυώνυμο βαθμού και κάνει 0 σε σημεία (σε όλα εκτός του ).

* Τελικά: ,
* Παρατηρήσεις:
  + Αν κάποιο πολυώνυμο βαθμού το πολύ πληροί την σχέση , , τότε αυτό συμπίπτει με την παρεμβολή κατά Lagrange.
  + Στα ίδια ισαπέχοντα σημεία πινακοποίησης τα πολυώνυμα Newton-Gregory (, ), Newton-ΔΔ και Lagrange ταυτίζονται.
  + Αν για κάποιο λόγο θελήσουμε σε ήδη υπάρχοντα μη ισαπέχοντα σημεία να προσθέσουμε κάποια επιπλέον, τότε:
    - Newton-ΔΔ: Απλώς προσθέτουμε τα σημεία, δεν χρειάζεται επαναϋπολογισμός.
    - Lagrange: Πρέπει να υπολογίσουμε από την αρχή όλους τους όρους του πολυωνύμου.
    - Αν τα σημεία είναι ισαπέχοντα, τότε η ανακατασκευή του πολυωνύμου ή είναι εξίσου εύκολη με αυτή του Newton-ΔΔ.
* Θεώρημα: *Αν που περιέχει τα σημεία παρεμβολής και το πολυώνυμο παρεμβολής σε αυτά τότε ισχύει*

*.*

* + Αν φράξουμε επαρκώς καλά τον όρο στο δεξί μέλος θα έχουμε μια καλή εκτίμηση του μέγιστου σφάλματος που μπορεί να συμβεί αν αντί της δώσουμε την τιμή της σε ένα σημείο .
  1. Πολυώνυμα Chebyshev
* Έστω . Η ελαχιστοποίηση του πολυωνύμου επιταχύνεται για , τα οποία ονομάζονται σημεία Chebyshev.
* Για την συγκεκριμένη επιλογή έχουμε ότι:

δηλαδή στο το παραπάνω πολυώνυμο, που είναι κυρίαρχο στη μελέτη του σφάλματος στην παρεμβολή, ποτέ δεν ξεπερνά κατά απόλυτη τιμή το .

* Αλλαγή Διαστήματος:
  + Αν και τα σημεία (ρίζες) Chebyshev ορίζονται στο μπορούμε να τα μεταφέρουμε σε οποιοδήποτε διάστημα μέσω του γραμμικού μετασχηματισμού

* + Ισχύει ότι .
* Κατασκευή των πολυωνύμων Chebyshev:
  + Τα πολυώνυμα Chebyshev ορίζονται από την ιδιόμορφη σχέση με .
    - :
    - :
    - : . Θέτοντας λαμβάνουμε:

* + - Γενικά:

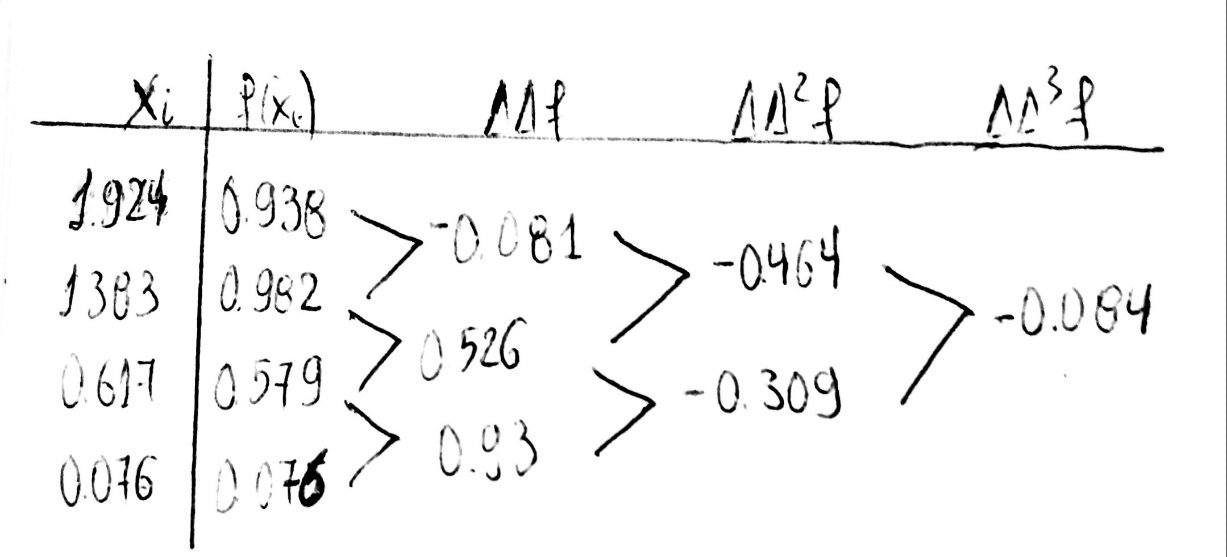
* + - * Αθροίζοντας τα παραπάνω κατά μέλη λαμβάνουμε την αναδρομική σχέση

* Παράδειγμα: *Να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής 3ου βαθμού της συνάρτησης όταν χρησιμοποιηθούν τα σημεία Chebyshev στο διάστημα .*

* + ,
    - Εδώ θέλουμε να βρούμε σημεία Chebyshev εφόσον έχουμε πολυώνυμο 3ου βαθμού.

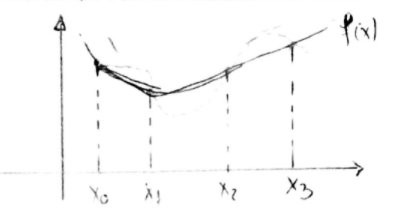
* + - ,
  + Σημεία Chebyshev:

* + Πίνακας Διαφορών:



* + Πολυώνυμο Παρεμβολής Newton-ΔΔ 3ου βαθμού:

* 1. Φαινόμενο Runge
* Είναι το πρόβλημα της μη ομοιόμορφης σύγκλισης της πολυωνυμικής παρεμβολής – κυρίως σε ισαπέχοντα σημεία – από πολυώνυμα μεγάλου βαθμού.
* Οφείλεται σε δύο παράγοντες:
  + Το καθώς .
  + Το τείνει προς το άπειρο πολύ γρήγορα (κακή επιλογή .
* Ένας τρόπος αντιμετώπισης είναι η καλύτερη επιλογή σημείων παρεμβολής τα οποία είναι πιο πυκνά στα άκρα του διαστήματος, για παράδειγμα τα σημεία Chebyshev.
  1. Πολυώνυμο Παρεμβολής κατά Hermite



* Αν υποθέσουμε ότι εκτός από την σχέση στα σημεία της παρεμβολής ισχύει και ότι όπου συμβολίζει την παράγωγο κ τάξης τότε έχουμε την παρεμβολή κατά Hermite: όπου τα και είναι τα μοναδικά πολυώνυμα βαθμού το πολύ τέτοια ώστε:

* Αποδεικνύεται ότι:

* Θεώρημα: *Έστω ανά δύο διαφορετικά μεταξύ τους σημεία και . Αν , το πολυώνυμο παρεμβολής Hermite ισχύει ότι , τέτοιο ώστε*
* Παράδειγμα: *Να βρείτε το πολυώνυμο παρεμβολής κατά Hermite της συνάρτησης κατασκευασμένο στα σημεία 0, 3, 5.*

* + Εύρεση των συντελεστών :

* + Παράγωγοι συντελεστών :

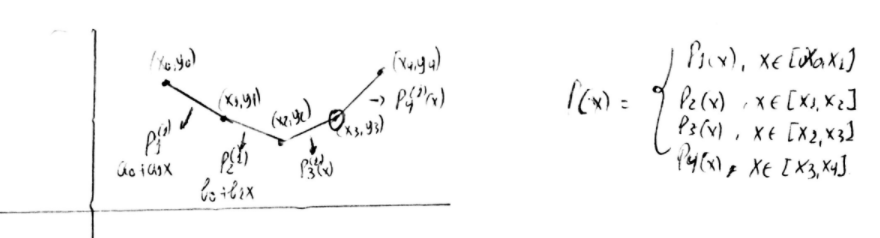
* + Τιμές των :

* + Εύρεση των συντελεστών και :

* + Πολυώνυμο παρεμβολής Hermite

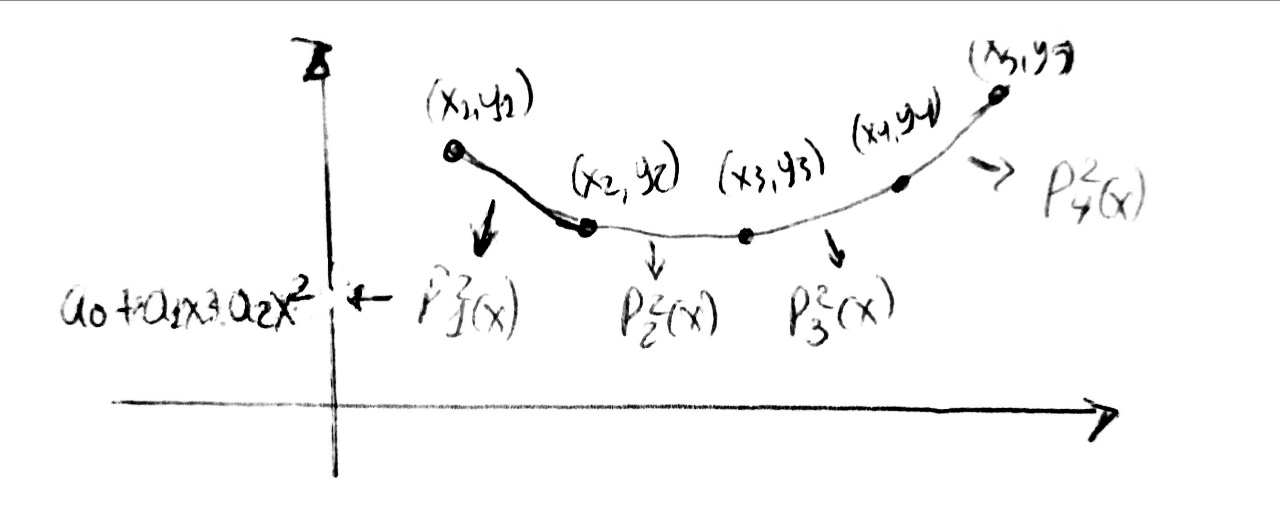
* 1. Παρεμβολή με splines
* Η πολυωνυμική παρεμβολή για μεγάλα παρουσιάζει θεωρητικά και υπολογιστικά προβλήματα χωρίς μάλιστα να επιτυγχάνει σε πολλές περιπτώσεις ομοιόμορφη προσέγγιση. Αντίθετα η πολυωνυμική προσέγγιση για μικρό παρουσιάζει τοπικά πολύ καλές προσεγγιστικές ιδιότητες.
* Έστω τότε αν η παρεμβάλλουσα στα σημεία

, τότε: (\*) όπου με συμβολίζουμε την ποσότητα , .



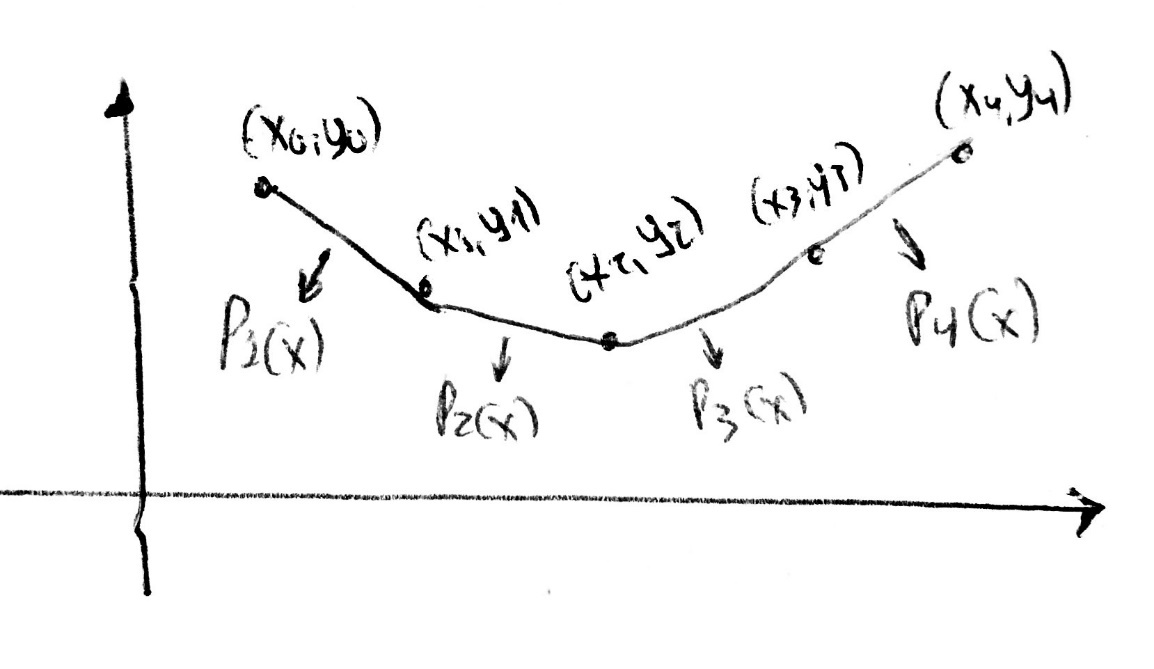
* (\*) Απόδειξη:
  + ,

* Η *παρεμβολή με πολυώνυμο*  στα σημεία , , δίνει σφάλμα
* Η *3ης τάξης παρεμβολή* στα σημεία , , , όπου δίνει σφάλμα .
* Από τα παραπάνω διαπιστώνουμε ότι αν το είναι μικρό τότε το σφάλμα θα είναι μικρό.
* Έστω ένας διαμερισμός του . *Splines* ως προς τον διαμερισμό αυτό καλούνται γενικά συναρτήσεις, οι οποίες σε κάθε διάστημα έχουν μια ορισμένη μορφή (π.χ. πολυώνυμο βαθμού ).
* Μαθηματικός ορισμός: Έστω , ένας διαμερισμός του διαστήματος και . Τα στοιχεία του συνόλου .
* Δοσμένης μιας συνάρτησης υπάρχει μια ακριβώς συνάρτηση η οποία παρεμβάλλεται στην στα σημεία . Η είναι η συνεχής τεθλασμένη γραμμή που περνάει από τα σημεία και δίνεται από τον τύπο:

* + ,
  + Προφανώς η είναι συνεχής αφού
  1. Splines ανώτερης τάξης
* Αν είχαμε σημεία, θα είχαμε η πολυώνυμα 2ου βαθμού να κατασκευάσουμε, δηλαδή θα έχουμε αγνώστους και εξισώσεις από την υπόθεση παρεμβολής , γενικά σε σημεία άρα και παραγόμενες εξισώσεις.
* εξισώσεις μπορούν να δημιουργήσουν ή

.

* 1. Κυβικές splines
* Γιατί να χρησιμοποιήσουμε κυβικές splines;
  + Η παρεμβολή με τμηματικά γραμμικές συναρτήσεις είναι μια υπολογιστικά οικονομική διαδικασία, η οποία όμως πάσχει από έλλειψη ομαλότητας (παραγωγισιμότητα).
  + Οι απλούστερες κατά τμήματα πολυωνυμικές συναρτήσεις που μας επιτρέπουν και παραγωγισιμότητα, είναι αυτές όπου σε κάθε διάστημα είναι 2ου βαθμού πολυώνυμο.
  + Το πρόβλημα που εμφανίζεται τότε είναι η δυσκολία να πληρωθούν οριακές συνθήκες που αφορούν την παράγωγο της παρεμβολής στα σημεία και .



* + Κάθε είναι πολυώνυμο το πολύ 3ου βαθμού, άρα είναι της μορφής .
  + Έχουμε αγνώστους (4 συντελεστές πολυωνύμου 3ου βαθμού). Έχουμε επίσης:
    - Λόγω παρεμβολής και συνέχειας:

**⇒ 2n εξισώσεις**

* + - Λόγω απαίτησης 1ης παραγώγου:

**⇒ (n-1) εξισώσεις**

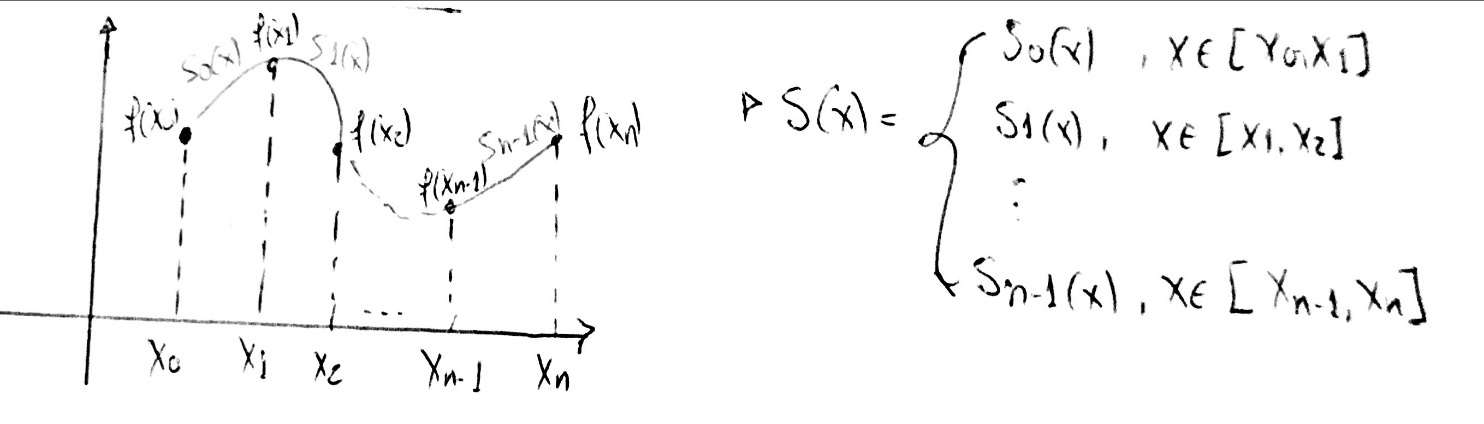
* + - Λόγω απαίτησης 2ης παραγώγου:

**⇒ (n-1) εξισώσεις**

* + Άρα συνολικά έχουμε εξισώσεις για τον υπολογισμό αγνώστων.
  + Προσθέτουμε 2 επιπλέον συνθήκες:

* + - *(φυσικές κυβικές splines)*

* + - και *(δεσμευμένες κυβικές splines)*
* Μια πιο λεπτομερής ματιά



* + Κάθε είναι της μορφής

με . (1)

* + Θα πρέπει λόγω παρεμβολής
  + Στους εσωτερικούς κόμβους θα πρέπει η να είναι συνεχής. Δηλαδή :

* + - (2)

Θέτουμε (αν όλα τα είναι ίσα τότε το λέμε ).

* + - (2) ,
  + Με ανάλογο τρόπο χειριζόμαστε την συνέχεια της 1ης παραγώγου στους εσωτερικούς κόμβους. Συγκεκριμένα ,

(3)

* + Το ίδιο πρέπει να ισχύει και για την 2η παράγωγο δηλαδή , (4).
    - Λύνουμε την (4) ως προς και αντικαθιστώ στις προηγούμενες. Δηλαδή (αν βρούμε τα βρίσκουμε το ).
    - Αντικαθιστούμε στην (2) και έχουμε:

* + - * (5)

και ομοίως στην (3) (6)

* + - Λύνουμε την (5) ως προς :

και με αλλαγή δεικτών:

* + - Αντικαθιστούμε στην (6) τα και έχουμε

. (7)

* + Δεδομένου ότι το 2ο μέλος γνωστό, η (7) οδηγεί σε ένα σύστημα εξισώσεων με αγνώστους τα ( πλήθους).
  + Αφού βρεθούν τα πηγαίνουμε στις αντίστοιχες εκφράσεις των συναρτήσει των και τα βρίσκουμε.
  + Αφού η (7) απεικονίζει σύστημα εξισώσεων, θα μπορεί να γραφεί ως όπου:

* + - Οι 1η και εξίσωση εξαρτώνται από τις συνοριακές συνθήκες.
  + Για φυσικές splines
  + Για δεσμευμένες κυβικές spline
  1. Splines τύπου Hermite
* Αν γνωρίζουμε τις παραγώγους της στα σημεία παρεμβολής ,

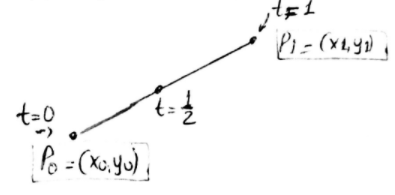
τότε μπορούμε ακολουθώντας την προηγούμενη διαδικασία κατασκευής κυβικών splines να ορίσουμε το κατά τμήματα κυβικό πολυώνυμο για το οποίο:

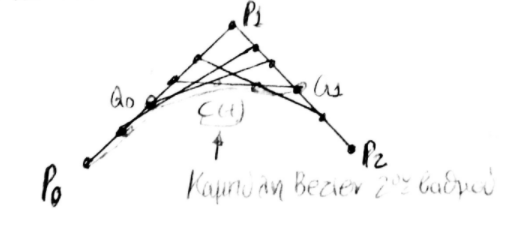


με

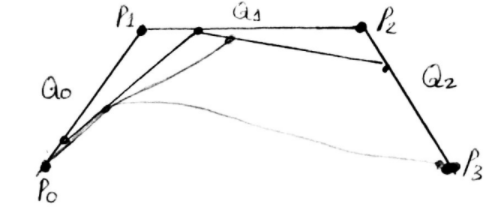
* Μία από τις διαφορές μεταξύ κυβικών splines και splines Hermite είναι η ομαλότητα:
  + Κυβικές splines: 2 φορές συνεχώς παραγωγίσιμη
  + Splines Hermite: 1 φορά συνεχώς παραγωγίσιμη
  1. Καμπύλες Bezier
* 1ης τάξης καμπύλη Bezier: όπου για :

  + - Αυτή η καμπύλη ξεκινάει από το και τερματίζει στο .
    - και



* 2ης τάξης καμπύλη Bezier: Χρειάζονται 3 σημεία . Η καμπύλη θα ξεκινάει από το και θα τερματίζει στο . Από το δεν διέρχεται γενικά. Ο ρόλος του είναι να καθορίσει την τροχιά της καμπύλης.

* 3ης τάξης καμπύλες Bezier: Δημιουργούνται από 4 σημεία όπου τα είναι τα σημεία παρεμβολής και τα είναι τα σημεία ελέγχου.



* Εύρεση τύπου καμπύλης Bezier:
  + 1ης τάξης: Βρέθηκε ήδη.
  + 2ης τάξης:
    - Δημιουργούμε τις γραμμικές καμπύλες Bezier

* + - Άρα η καμπύλη που φτιάχνουμε θα είναι:

* + 3ης τάξης: Θεωρώντας ότι τα στην παραπάνω σχέση είναι γραμμικές Bezier λαμβάνουμε:
    - (\*) όπου τα είναι τα σημεία αφετηρίας και τερματισμού και .
    - (\*) όπου:

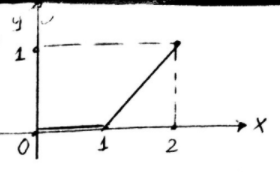
* 1. Διάφορα Θέματα
     1. Εύρεση μέγιστου απόλυτου σφάλματος (άνω φράγμα)
* Χρησιμοποιούμε τον κατάλληλο τύπο σφάλματος ανάλογα με τον τύπο παρεμβολής που έχουμε και λύνουμε την ανίσωση .
* Τύποι:

|  |  |
| --- | --- |
| Είδος Παρεμβολής | Τύπος |
| Παρεμβολή Νewton-Gregory (για ισαπέχοντα σημεία), Newton-ΔΔ και Lagrange |  |
| Παρεμβολή με σημεία Chebyshev |  |
| Παρεμβολή Hermite |  |
| Παρεμβολή με splines για πολυώνυμο |  |
| Παρεμβολή με splines για πολυώνυμο |  |
| Παρεμβολή με splines για πολυώνυμο |  |

* Όπως είδαμε και στην θεωρία για την εύρεση του μελετάμε την μονοτονία της εκτός και αν την γνωρίζουμε εξ αρχής.
  + Προσέχουμε η συνάρτηση να είναι φορές παραγωγίσιμη σε όλο το διάστημα . Αν δεν είναι σε κάποιο, δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους τύπους. Μπορούμε όμως να χωρίσουμε το διάστημα σε δύο και να κάνουμε ξεχωριστή μελέτη της μονοτονίας βρίσκοντας το μέγιστο με το κλασικό τρόπο.
* Παράδειγμα: *Έστω που έχει την παρακάτω παράσταση*.

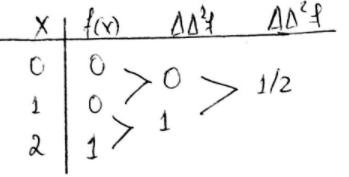
*Α) Να φτιάξετε το πολυώνυμο παρεμβολής Newton-ΔΔ 2ου βαθμού το οποίο παρεμβάλλει την στα σημεία 0,1,2.*

*Β) Να βρείτε το μέγιστο σφάλμα .*



**A)**

* + Πίνακας Διαφορών



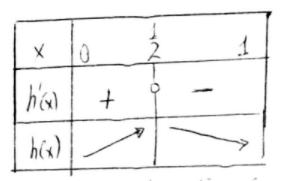
* + Παρατηρούμε ότι η δεν είναι παραγωγίσιμη στο 1 άρα χωρίζουμε το διάστημα σε και και κάνουμε ξεχωριστή μελέτη μονοτονίας βρίσκοντας τελικά το max.

**B)**

* + - * Έστω



Άρα

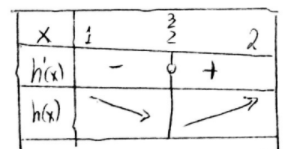
Άρα

* + - * Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο στο με

* + - * Έστω

Άρα

Άρα



**-**

**+**

* + - * Άρα έχουμε τοπικό μέγιστο στο με



* + - Άρα
    1. Ελάχιστη μέγιστη τιμή και μέγιστο σφάλμα Chebyshev
* Όταν ζητείται η ελάχιστη μέγιστη τιμή χρησιμοποιούμε έναν από τους ακόλουθους τύπους ανάλογα με το διάστημα που έχουμε:

* + στο

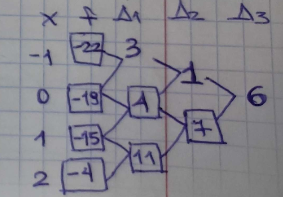
* + στο
* Όταν όμως έχουμε ένα έρωτημα του τύπου «Βρείτε το σφάλμα » χρησιμοποιούμε τον τύπο

για να βρούμε το μέγιστο σφάλμα / άνω φράγμα για το σφάλμα.

* Επίσης όταν ζητείται να βρούμε σημεία τέτοια ώστε το πολυώνυμο βαθμού να παίρνει στο διάστημα την ελάχιστη δυνατή μέγιστη τιμή τότε:
  + Βρίσκουμε τα σημεία Chebyshev
  + Βρίσκουμε την ελάχιστη μέγιστη δυνατή τιμή με βάση τους τύπους που είδαμε στην αρχή.
    1. Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής βαθμού αν γνωρίζουμε κάποιες τιμές διαφορών (π.χ. ή κτλπ.)
* Αν μας δίνονται αυτές οι πληροφορίες τότε χρησιμοποιούμε την σχέση και φτιάχνουμε τον πίνακα διαφορών χρησιμοποιώντας κατάλληλα τους ορισμούς των .
* Παράδειγμα: *Να βρεθεί το πολυώνυμο παρεμβολής 3ου βαθμού μιας συνάρτησης αν γνωρίζουμε ότι ,*

*, και ότι ο μεγιστοβάθμιος όρος του είναι το 1.*

* + - Εφόσον ο μεγιστόβαθμιος όρος του είναι 1, οι διαφορές θα είναι σταθερές και ίσες με .
    - Επειδή έχουμε:

* + - Συμπληρώνουμε τον Πίνακα Διαφορών όπως φαίνεται παρακάτω από εμπρός προς τα πίσω (από το τέλος προς την αρχή):
  + Εύρεση πολυωνύμου παρεμβολής ()

* + 1. Έστω ότι παρεμβάλλουμε μια συνάρτηση σε ένα διάστημα σε ένα πολυώνυμο βαθμού (σε ισαπέχοντα σημεία). Πόσο μικρό πρέπει να είναι το διάστημα ώστε το σφάλμα ;
* Θα το δούμε μέσω παραδείγματος
* Παράδειγμα: *Σε ένα διάστημα παρεμβάλλουμε την εκθετική συνάρτηση με ένα πολυώνυμο παρεμβολής 5ου βαθμού στα ισαπέχοντα σημεία , ,…, με . Πόσο μικρό πρέπει να είναι το διάστημα ώστε το σφάλμα ;*

* + , και το εξαρτάται από το .

* + με . (\*)

* + . Αντικαθιστούμε στο (\*) και για έχουμε:

* + Θέλουμε

* + 1. Να βρεθούν οι παράμετροι ώστε η κατά τμήματα συνάρτηση είναι (φυσική ή δεσμευμένη) κυβική spline.
* Για να είναι η κυβική spline, γενικά, πρέπει να ικανοποιηθούν οι παρακάτω συνθήκες:
  + Οι να είναι συνεχείς στο , δηλαδή:

* + (αν δεν δίνεται κάποια πληροφορία για την δεν χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη)
* Για να είναι η φυσική κυβική spline, πρέπει μαζί με τις παραπάνω συνθήκες να ισχύουν και τα επόμενα:

* Για να είναι η δεσμευμένη κυβική spline, πρέπει μαζί με τις συνθήκες της κυβικής spline να ισχύουν τα παρακάτω:

Ταδίνονται, αλλά μπορεί να ζητηθούν*.*

* Προσοχή: Υπάρχει περίπτωση οι συνθήκες να μην ικανοποιούνται οπότε να μην ορίζεται καν η spline και να μην χρειαστεί να βρούμε τις παραμέτρους.
* Παράδειγμα 1: *Θεωρούμε την κυβική spline*

*Να βρείτε το . Υπάρχει ώστε η παραπάνω spline να είναι φυσική; Αν ναι, βρείτε το.*

* + Πρέπει:

* + Για να είναι φυσική κυβική spline πρέπει:



* Παράδειγμα 2: *Μια δεσμευμένη κυβική spline για μια συνάρτηση ορίζεται από την:*

*Να βρεθούν τα και .*

* + Πρέπει:

* Παράδειγμα 3: *Να βρεθούν τα ώστε η*

*να είναι φυσική κυβική spline.*

* + Πρέπει:

* + - (δεν ισχύει άρα η δεν μπορεί να είναι φυσική κυβική spline)
    1. Να βρεθεί η (φυσική ή δεσμευμένη) κυβική spline που διέρχεται από κάποια σημεία
* Ορίζουμε την συνάρτηση

Και βρίσκουμε τις παραμέτρους όπως είδαμε στο 5.15.5.

* Παράδειγμα: *Να βρεθεί η φυσική κυβική spline που διέρχεται από τα σημεία , , .*
  + Ορίζουμε την συνάρτηση:

* + Πρέπει:







(1)

(2)

(3)

(4)

(5)

* + - (2) (2\*)
    - (3) (3\*)
    - (4) (4\*)
    - (2\*)
    - (3\*)

(7)

* + - (4\*) (8)
    - (5)

(9)

* + - (7),(8),(9)

* + - (9)
    - (8)
    - (7)
    - (6)
  + Τελικά:

* + 1. Μια «πρακτική» μέθοδος για την εύρεση της κυβικής καμπύλης Bezier
* Έστω ότι μας δίνονται τα σημεία παρεμβολής και καθώς και τα σημεία ελέγχου , .
* Έστω επίσης

Με και

* Πρέπει να λύσουμε τις παρακάτω εξισώσεις για να βρούμε τις παραμέτρους:
* Παράδειγμα: *Να βρεθεί η κυβική καμπύλη Bezier που διέρχεται από τα σημεία , και έχει σημεία ελέγχου τα και . Κάντε την γραφική παράσταση.*
  + Σημεία Παρεμβολής:

* + Σημεία Ελέγχου:

* + Κυβική καμπύλη Bezier:

με

* + - και
  + Λύνουμε τις απαιτούμενες εξισώσεις:







(1)



(2)

(3)

(4)

* + - (1)

* + - (3)

* + - (2)

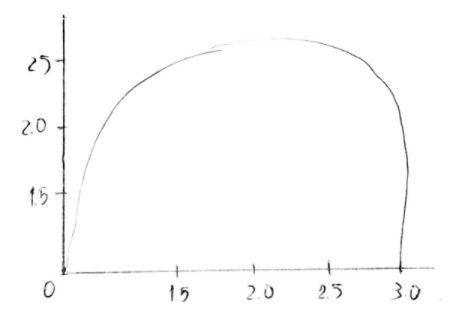
* + - (4)







* + Άρα



* + 1. Δίνεται μια καμπύλη Bezier του χώρου. Να βρεθούν οι κόμβοι (σημεία παρεμβολής) και τα σημεία ελέγχου
* Έστω ότι μας δίνεται μια καμπύλη Bezier για παράδειγμα

,

* + Για την ισχύει ότι όπου:

* + Άρα

* + Με την εξίσωση των συντελεστών των 2 πολυωνύμων παίρνουμε το ακόλουθο σύστημα:

* + Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία και για τα κτλπ.
* Παράδειγμα: *Να βρεθούν οι κόμβοι (σημεία παρεμβολής) και τα σημεία ελέγχου της ακόλουθης καμπύλης Bezier χώρου .*
  + Έστω:
  + Για γνωρίζουμε ότι:









































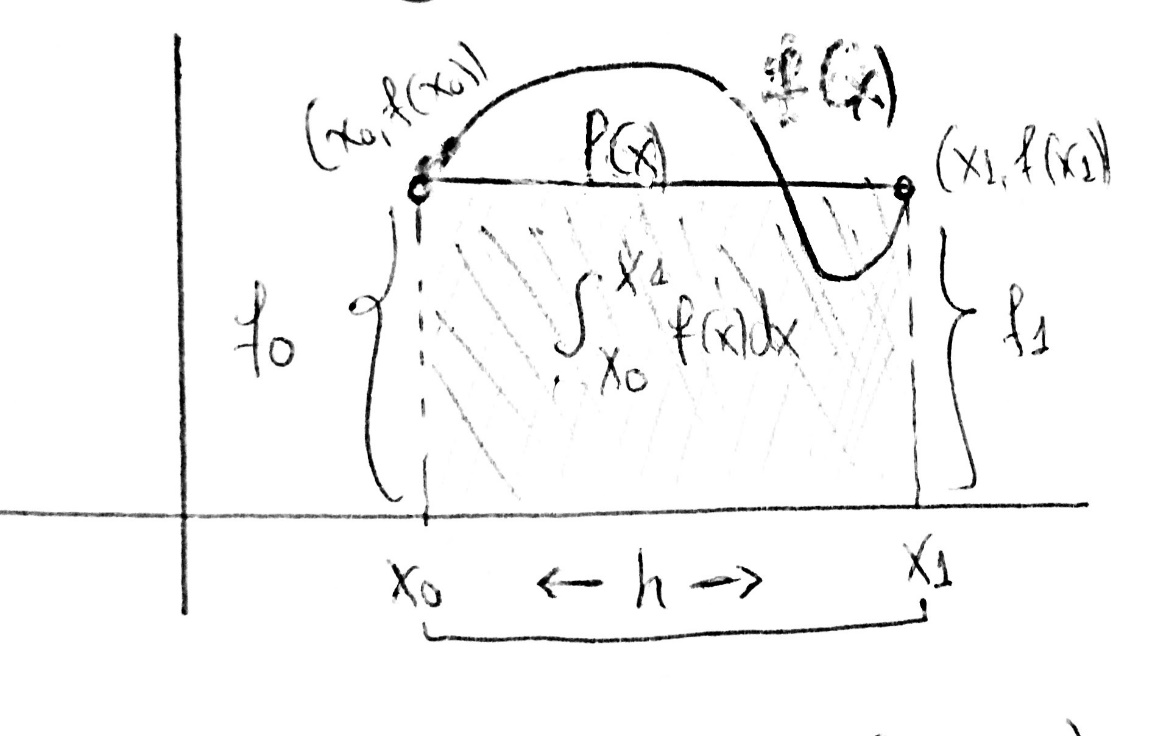


* + Σημεία Παρεμβολής:

* + Σημεία Ελέγχου:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6ο – Αριθμητική Ολοκλήρωση

1. 1. Εισαγωγή



* Έστω ότι το είναι ένα γραμμικό πολυώνυμο παρεμβολής:

* Αν γνωρίζαμε την στα σημεία τότε θα μπορούσαμε ανάλογα να δημιουργήσουμε το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού .
* Γενικά:
  1. Απλός και Γενικευμένος Τύπος Τραπεζίου
* Απλός Τύπος του Τραπεζίου:
  + Έστω ότι έχουμε το πολυώνυμο παρεμβολής 1ου βαθμού :

* + Σφάλμα:
    - Γνωρίζουμε ότι
    - Για :

* + - Από την τελευταία σχέση παρατηρούμε ότι το

διατηρεί πρόσημο () στο οπότε από Θεώρημα Μέσης Τιμής για τον Ολοκληρωτικό Λογισμό υπάρχει ώστε:

* Γενικευμένος Τύπος του Τραπεζίου:
  + Έστω ότι γνωρίζουμε την στα σημεία και θέλουμε να υπολογίσουμε το .
  + Σπάμε το διάστημα

και σε κάθε διάστημα εφαρμόζουμε τον κανόνα του τραπεζίου. Ο τύπος που προκύπτει ονομάζεται γενικευμένος τύπος του τραπεζίου:

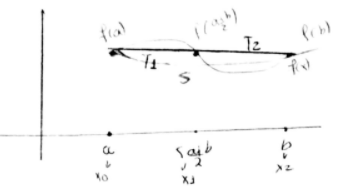
* + Σφάλμα:

* + - Σφάλμα:
    - Γράφουμε το

* + - * Σε κάθε το σφάλμα είναι:

* + - Αντότε

* + - Αν η είναι συνεχής στο τότε τέτοιο ώστε:
* Παρατηρήσεις:
  + Από τον παραπάνω τύπο παρατηρούμε ότι το και μάλιστα το σφάλμα ασυμπτωτικά υποτετραπλασιάζεται όταν το υποδιαπλασιάζεται ().
  1. Απλός και Γενικευμένος Τύπος - Simpson
* Απλός τύπος:



* + Έστω ότι γνωρίζουμε 3 ισαπέχοντα σημεία της στα δηλαδή .
  + Έστω επίσης ότι έχουμε το πολυώνυμο παρεμβολής 2ου βαθμού .

* + - Ο παραπάνω τύπος αποτελεί τον απλό κανόνα του

– Simpson με , και .

* + Σφάλμα:

* + - με
* Γενικευμένος Τύπος:
  + Το διάστημα χωρίζεται σε

,οπότε για να υλοποιηθεί ο Γενικευμένος Κανόνας του – Simpson μας χρειάζεται η γνώση περιττού πλήθους ισαπέχοντων .

* + Εφαρμόζουμε τον απλό τύπο του – Simpson σε κάθε διάστημα:

* + Σφάλμα:

* Παρατήρηση: Με βάση τους τύπους των σφαλμάτων που είδαμε παρατηρούμε ότι ο κανόνας – Simpson προσεγγίζει το ακριβές ολοκλήρωμα με ρυθμό , δηλαδή όταν το πλήθος κόμβων (βήμα ) διπλασιάζεται, το σφάλμα περίπου δεκαεξαπλασιάζεται.
  1. Απλός και Γενικευμένος Τύπος – Simpson.
* Απλός Τύπος:
  + Έστω το πολυώνυμο παρεμβολής 3ου βαθμού.

* + Σφάλμα:

* + - , με
    - Παρατηρούμε ότι η μέθοδος είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι 3ου βαθμού και είναι περίπου 2 φορές πιο ακριβής από τον – Simpson αν υποθέσουμε ότι . Πρέπει όμως να υπολογίσουμε άλλη μια φορά την .
* Γενικευμένος Τύπος:
  + Όταν το διάστημα ολοκλήρωσης μπορεί να χωριστεί σε – διαδοχικά και ισομερή διαστήματα τότε ο κανόνας αυτός γενικεύεται στον παρακάτω τύπο:

* + Σφάλμα:

* + - , με

και

* + - Σύμφωνα με τον τύπο του σφάλματος, ο τύπος – Simpson προσεγγίζει ακριβώς το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης με ρυθμό όπως και ο – Simpson.
  1. Γενικές παρατηρήσεις για τις μεθόδους Τραπεζίου, – Simpson και – Simpson
* Οι τάξεις ως προς των μεθόδων τραπεζίου, – Simpson και – Simpson είναι τουλάχιστον:
  + Τραπεζίου: 2 ()
  + 1/3 – Simpson: 4 ()
  + 3/8 – Simpson: 4 ()

Υπό πολύ συγκεκριμένες συνθήκες μπορεί να είναι ακόμα μεγαλύτερη. Αν δεν είναι όμως όσο ομαλή απαιτεί ο τύπος σφάλματος, η ταχύτητα σύγκλισης είναι μικρότερη.

* Οι μέθοδοι δίνουν ακριβές αποτέλεσμα για το ολοκλήρωμα της όταν το είναι πολυώνυμο μέχρι:
  + Τραπεζίου: 1ου βαθμού
  + 1/3 – Simpson: 3ου βαθμού
  + 3/8 – Simpson: 3ου βαθμού
* Οι μέθοδοι 1/8 και 3/8 – Simpson έχουν την ίδια ασυμπτωτική ταχύτητα και είναι ακριβείς μέχρι του ίδιου βαθμού πολυώνυμα, ωστόσο ο 1/3 – Simpson είναι αποτελεσματικότερος καθώς ο 3/8 – Simpson απαιτεί έναν ακόμη υπολογισμό συνάρτησης και πολλαπλασιασμό ανά διάστημα απ’ ότι ο 1/3.
* Αν η συνάρτηση είναι θετική και φθίνουσα τότε για την αποφυγή σφαλμάτων στρογγύλευσης είναι καλύτερα να αθροίζουμε από το τέλος προς την αρχή. Αντίστροφα πρέπει να πράττουμε όταν είναι θετική και αύξουσα. Ανάλογα σκεφτόμαστε όταν η συνάρτηση είναι αρνητική.
  1. Πειραματική εύρεση ταχύτητας σύγκλισης
* Όταν δεν γνωρίζουμε την ακριβή τάξη σύγκλισης μιας αριθμητικής μεθόδου ολοκλήρωσης, μπορούμε να την εκτιμήσουμε μέσω πειραματικών δεδομένων.
* Έστω η άγνωστη τάξη της σύγκλισης της μεθόδου. Τότε:

* + όπου:

* + - : η αριθμητική προσέγγιση του ολοκληρώματος για βήμα .
    - : Η ακριβής τιμή του ολοκληρώματος
  + Επίσης:
* Υποθέτουμε ότι η ποσότητα όπως με όπως και . Τότε:

* Όσο μικρότερο το τόσο καλύτερη προσέγγιση θα δίνει η παραπάνω σχέση για την τάξη της μεθόδου. Στην πράξη, βέβαια, δεν γνωρίζουμε την ακριβή τιμή του .
  + Έστω όμως ότι και (θεωρούμε τις και στο δεύτερο τύπο ως προσεγγίσεις του .
  + Τότε:
  1. Προεκβολή Richardson
* Η προεκβολή Richardson είναι μια τεχνική επιτάχυνσης της σύγκλισης μιας ακολουθίας και βοηθάει στην βελτίωση της ακρίβειας προσεγγιστικών αριθμητικών μεθόδων.
* Έστω η ακριβής τιμή και , οι αριθμητικές προσεγγίσεις αυτής σε κάποια μέθοδο με βήμα και αντίστοιχα.
  + Αν η αριθμητική μέθοδος είναι τάξης τότε:
    - , (1)
    - , (2)
  + Πολλαπλασιάζουμε την (2) με :
    - (3)

(4)

* + Αφαιρούμε τις σχέσεις (3) και (4) κατά μέλη:

* + Ο παράγοντας 2 μπορεί να αντικατασταθεί από οποιοδήποτε παράγοντα .
* Απόδειξη της Προεκβολής Richardson:
  + Έστω μια προσέγγιση της που εξαρτάται από το βήμα και δίνεται από τον τύπο όπου:

* + - : άγνωστες σταθερές

* + - : γνωστές σταθερές με
  + Ο παραπάνω τύπος για βήματα και με γίνεται
  + Αν πολλαπλασιάσουμε τη 2η εξίσωση με και αφαιρέσουμε από την πρώτη λαμβάνουμε:

που είναι τάξης ακρίβειας αντί για .

* + Η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί και για την καινούρια προσέγγιση που πήραμε και να λάβει τον γενικό τύπο:

* + - ώστε
  + Η αξία της μεθόδου έγκειται στο γεγονός ότι αυξάνει την ακρίβεια χωρίς να μικραίνουμε σημαντικά το (πολύ μικρό οδηγεί σε αύξηση των σφαλμάτων στρογγύλευσης).
  + Είναι προφανές ότι η τεχνική αυτή είναι ιδιαίτερα αποτελεσματική όταν . Όσο μεγαλύτερη είναι η προσέγγιση της σε σχέση με την .
  1. Τεχνική Romberg
* Το προσεγγίζεται από την Γενικευμένη Μέθοδο του Τραπεζίου με βήματα με , .
  + Τότε για κάθε χρησιμοποιείται η τεχνική Richardson φορές σε προηγούμενες εκτιμήσεις για να βελτιωθεί η τάξη ακριβείας όσο καλύτερα γίνεται.
* Έστω ότι υπολογίζουμε τις εκτιμήσεις και του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας την Γενικευμένη Μέθοδο Τραπεζίου με ένα και δύο υποδιαστήματα. Δηλαδή:

* Έστω ότι η είναι . Τότε η Γενικευμένη Μέθοδος για γενικό αριθμό υποδιαστημάτων ικανοποιεί το

όπου , και οι σταθερές εξαρτώνται μόνο από τις παραγώγους της .

* Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε την προεκβολή Richardson για να υπολογίσουμε μια εκτίμηση με μεγαλύτερη τάξη ακριβείας. Έχουμε:

* Αγνοώντας τους όρους , έχουμε ένα σύστημα εξισώσεων που λύνεται ως προς και .
* Η τιμή της που την ονομάζουμε είναι μια βελτιωμένη εκτίμηση και δίνεται από το
  + Άρα
* Συνεχίζουμε την διαδικασία για να πάρουμε μια εκτίμηση με όση μεγάλη ακρίβεια θέλουμε.
* Αλγόριθμος:

h = b - a

for j=1,2,…,J do

//Γενικευμένος Κανόνας Τραπεζίου

Tj,1 = (h/2) \* [f(a) + 2\* + f(b)]

For k = 2,3,…,j do

//Προεκβολή Richardson

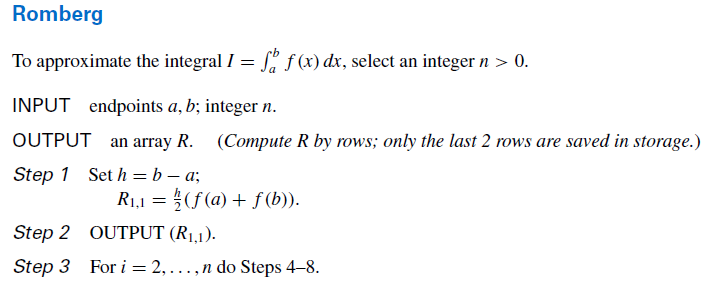
Tj,k = Tj,k-1 + (Tj,k-1 – Tj-1,k-1)/(4k-1 – 1)

end

h = h/2

end

* Παραλλαγή του αλγορίθμου (από το ebook):



Εικόνα που περιέχει κείμενο

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

* Παράδειγμα: *Για μια συνάρτηση γνωρίζουμε μόνο τις παρακάτω τιμές*

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|  | 2.4142 | 2.6734 | 2.8974 | 3.0976 | 3.2804 |

*Χρησιμοποιώντας την τεχνική Romberg και προσεγγίστε όσο καλύτερα μπορείτε το ολοκλήρωμα* .

* + , :

* + , :

* + , :

* + , :

* + , :

* + , :

* + Εφόσον οι τιμές του πίνακα έχουν 4 δ.ψ:

* 1. Ολοκλήρωση κατά Gauss
* Όλοι οι αριθμητικοί τύποι είναι της μορφής όπου τα σημεία δειγματοληψίας της και τα βάρη.
* Παραδείγματα:
  + Τραπέζιο:
  + 1/3 – Simpson:
* Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών: δεδομένα, υπό εύρεση:
  + Θέλουμε να βρούμε τα «καλύτερα» ώστε δηλαδή να βρούμε τον ακριβέστερο τύπο που μπορεί να παραχθεί αν υποθέσουμε ότι η είναι πολυώνυμο.
  + Τα θα βρεθούν από την απαίτηση ότι ο παραπάνω τύπος να είναι ακριβής όταν η
  + Η επιλογή των συγκεκριμένων πολυωνύμων δεν είναι τυχαία αλλά δεν είναι και μοναδική.
  + Παρατήρηση: Αν έχουμε ελέγξει την ακρίβεια του παραπάνω τύπου στα πολυώνυμα τότε είμαστε σίγουροι ότι ο τύπος θα είναι ακριβής για οποιοδήποτε πολυώνυμο 2ου βαθμού.
    - Απόδειξη:
      * Έστω , και .
      * Έστω τυχαίο πολυώνυμο 2ου βαθμού, π.χ



* + Συνεπώς για την επίλυση του συγκεκριμένου προβλήματος κατασκευάζουμε εξισώσεις από τις σχέσεις:

Δηλαδή:

* + - :
    - :
    - :

…

* Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών: δεδομένα, υπό εύρεση:
  + Τα δεν μπορούν να είναι αυθαίρετα, καθώς για να είναι ο τύπος ακριβής για οποιοδήποτε πολυώνυμο θα πρέπει τουλάχιστον να ισχύει η σχέση .
  + Για τον προσδιορισμό των θα πρέπει να λύσουμε πάλι το σύστημα που προκύπτει αν αντικαταστήσουμε την συνάρτηση με τα πολυώνυμα .
  + Όμως το παραγόμενο σύστημα δεν είναι γραμμικό, δεν εξασφαλίζεται ούτε η ύπαρξη αλλά ούτε η μοναδικότητα της λύσης και είναι δύσκολο (έως απίθανο) να επιλυθεί, ειδικά για μεγάλες τιμές του .
* Μέθοδος προσδιοριστέων συντελεστών: και υπό εύρεση:
  + Η ιδέα είναι να θέσουμε όπου τα ανήκουν στο διάστημα και οι συντελεστές προσδιορίζονται έτσι ώστε να ελαχιστοποιούν το σφάλμα.
  + Τα και ορίζονται πάντα και είναι μοναδικά.
    - Έτσι λαμβάνουμε τύπους ολοκλήρωσης που είναι ακριβείς για πολυώνυμα μέχρι βαθμού.
  + Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι και οπότε έχουμε: , . Τότε:
    - Τα πρέπει να είναι ρίζες του πολυωνύμου Legendre βαθμού .
      * Τα πολυώνυμα Legendre είναι ορθογώνια δηλαδή:

1. ,

1. ,
   * + - Όπως όλα τα ορθογώνια πολυώνυμα έτσι και για τα πολυώνυμα Legendre υπάρχει αναδρομικός τύπος που δίνει από τα δύο προηγούμενα, το επόμενο. Συγκεκριμένα:

μεκαι *.*

* + - Τα υπολογίζονται από τα ολοκληρώματα όπου οι συντελεστές του πολυωνύμου Lagrange βαθμού .

…

* + Σύμφωνα λοιπόν με τα προηγούμενα:
    - :

* + - :

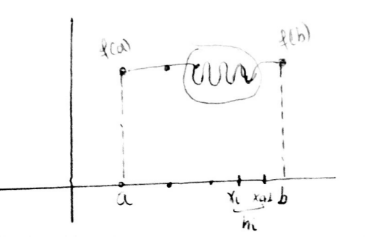
* + - * και



* + - :

* + - * , και

* 1. Μέθοδοι Προσαρμοσμένης Ολοκλήρωσης
* Υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις που παρουσιάζουν μεγάλες διακυμάνσεις σε μικρές περιοχές του διαστήματος ολοκλήρωσης.
* Αν χρησιμοποιήσουμε ομοιόμορφη διαμέριση τότε θα αυξήσουμε περιττά το κόστος πράξεων, αφού θα υποδιαμερίσουμε και διαστήματα που δεν χρειάζεται υπολογίζοντας την τιμή της σε περιττούς από πλευράς ακρίβειας, κόμβους. Επίσης η χρήση πολλών κόμβων αναπόφευκτα αυξάνουν και τα σφάλματα στρογγύλευσης.
* Ένας λογικός τρόπος ώστε να αποφασίσουμε που θα χρησιμοποιήσουμε περισσότερα σημεία είναι ο εξής:
  + Ξεκινάμε διαιρώντας το αρχικό διάστημα στα και χρησιμοποιούμε τον ίδιο αριθμητικό κανόνα ολοκλήρωσης και στα δύο υποδιαστήματα.
  + Συγκρίνουμε τα αποτελέσματα με τον αριθμητικό κανόνα αλλά αυτή την φορά εφαρμοσμένο σε όλο το διάστημα.
  + Αν η διαφορά είναι μικρότερη από μια προκαθορισμένη ακρίβεια τότε σταματάμε, αλλιώς χρησιμοποιούμε την παραπάνω τεχνική στα υποδιαστήματα.



* Παράδειγμα:
  + Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα με τον Γενικευμένο Κανόνα του Τραπεζίου (μπορεί να αντικατασταθεί από οποιαδήποτε άλλη μέθοδο)
  + Έστω είναι ο απλός τύπος τραπεζίου στο με .
  + Αν θέλουμε να υπολογίσουμε το με σφάλμα το πολύ αρκεί σε κάθε διάστημα:

* + Όμως για το σφάλμα ολοκλήρωσης της μεθόδου τραπεζίου ισχύει με (1)
  + Έστω ότι υποδιπλασιάζουμε το διάστημα

Αν ονομάσουμε τον γενικευμένο κανόνα τραπεζίου στο διάστημα τότε

* + - , (2)

Από (1) και (2) έχουμε:

* 1. Διάφορα Θέματα
     1. Εύρεση ελάχιστου πλήθους υποδιαστημάτων που απαιτούνται για την προσέγγιση ενός ολοκληρώματος με σφάλμα που δεν ξεπερνάει μια τιμή .
* Οι συνηθισμένες περιπτώσεις είναι ο Κανόνας του Τραπεζίου και ο Κανόνας 1/3 Simpson (απλός ή γενικευμένος).
* Ουσιαστικά ζητείται να βρούμε την τιμή του που θα ικανοποιεί την συνθήκη αυτή.
* Χρησιμοποιούμε τον τύπο του σφάλματος του αριθμητικού τύπου ολοκλήρωσης της εκφώνησης και λύνουμε ως προς .
  + Το θα προκύψει από την ισότητα .
  + Προσέχουμε ότι θα χρειαστεί να βρούμε τον μέγιστο της ή (τραπέζιο και 1/3 Simpson αντίστοιχα)
* Αν πρέπει να χρησιμοποιηθούν δύο μέθοδοι, μπορεί να ζητηθεί το πόσο ταχύτερη είναι η μία από την άλλη. Βρίσκουμε λοιπόν τις τιμές του και των δύο και βρίσκουμε τον λόγο .
* Παράδειγμα: *Να εκτιμηθεί το πλήθος των κόμβων που θα χρειαστούν ώστε να προσεγγιστεί το ολοκλήρωμα με τους τύπους (a) Γενικευμένου Κανόνα του Τραπεζίου και (b) Γενικευμένου Κανόνα 1/3 Simpson με σφάλμα που δεν θα ξεπερνά το . Ποια μέθοδος είναι ταχύτερη και πόσες φορές;*
  + Έστω .

* + (a) Γενικευμένος Κανόνας Τραπεζίου

(1)

* + - 1. Επειδή η η στο άρα .

(2)

* + - 1. άρα στο οπότε

* + - φορές ταχύτερη είναι η 1/3 Simpson από το Τραπέζιο.
    1. Δίνονται πληροφορίες που αφορούν τις τιμές μιας συνάρτησης (ενδεχομένως και των παραγώγων της). Να βρεθεί αριθμητικός τύπος που να προσεγγίζει το ολοκλήρωμαγια να είναι ακριβής για πολυώνυμα μέχρι βαθμού.
* Εφαρμόζουμε την ολοκλήρωση κατά Gauss για προσδιορισμό των συντελεστών, όπως είδαμε στην θεωρία.
* Παράδειγμα: *Για μια συνάρτηση γνωρίζουμε τις εξής τιμές: , και . Να βρείτε αριθμητικό τύπο που να προσεγγίζει το . Ο τύπος σας πρέπει να είναι ακριβής για την περίπτωση που η είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.*
  + Ολοκλήρωση Gauss:
  + Εύρεση συντελεστών:

* + Άρα ο αριθμητικός τύπος είναι:

* + Επιβεβαίωση ακρίβειας του αριθμητικού τύπου (εδώ ο τύπος πρέπει να είναι ακριβής για πολυώνυμα 2ου βαθμού):

* + - Άρα επιβεβαιώσαμε ότι ο τύπος είναι ακριβής όταν η είναι πολυώνυμο 2ου βαθμού.
    1. Ακριβής υπολογισμός ολοκληρώματος με χρήση αριθμητικού τύπου / Ποια πρέπει να χρησιμοποιήσουμε;
* Για να αποφασίσουμε ποια αριθμητική μέθοδο ολοκλήρωσης θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε πρέπει να παρατηρήσουμε τι βαθμού πολυώνυμο είναι η δοθείσα .
* Αν λοιπόν η είναι πολυώνυμο:
  + Μέχρι 1ου βαθμού:
    - Μέθοδος Τραπεζίου (απλός ή σύνθετος)
    - Μέθοδος Gauss-Legendre για
  + Μέχρι 3ου βαθμού:
    - Μέθοδος 1/3 - Simpson (απλός ή σύνθετος)
    - Μέθοδος 3/8 - Simpson (απλός ή σύνθετος) – χρησιμοποιούμε όμως την 1/3 – Simpson για λιγότερες πράξεις.
    - Μέθοδος Gauss-Legendre για .
  + Πάνω από 3ου βαθμού:
    - Μέθοδος Gauss – Legendre με .
* Παράδειγμα: *Να υπολογιστεί ακριβώς το ολοκλήρωμα*

* + Παρατηρούμε ότι αν αναπτύξουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα θα προκύψει πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε είτε τον κανόνα 1/3 - Simpson είτε τον 3/8 – Simpson.
  + Επιλέγουμε τον 1/3 – Simpson:

    - Τιμές των :







* + 1. Ολοκλήρωση Gauss-Legendre σε διάστημα
* Αν πρέπει να χρησιμοποιήσουμε ολοκλήρωση κατά Gauss-Legendre για τυχαίο διάστημα πρέπει να μετασχηματίσουμε το ολοκλήρωμα έτσι ώστε να υπολογισθεί στο .
* Χρησιμοποιούμε τον μετασχηματισμό όπου οι ρίζες του πολυωνύμου Legendre βαθμού και οπότε έχουμε ότι
* Παράδειγμα: *Να προσεγγίσετε το ολοκλήρωμα με την μέθοδο του Gauss-Legendre σε 2 σημεία*
  + Είμαστε στο διάστημα άρα πρέπει να κάνουμε κατάλληλο μετασχηματισμό:

* + - Εφόσον έχουμε σημεία:

* + - * και

* + - * και

* + 1. Υπολογισμός πολλαπλού ολοκληρώματος με αριθμητικό τύπο ολοκλήρωσης:
* Έστω ότι έχουμε ένα πολλαπλό ολοκλήρωμα, π.χ. .
* Για τον υπολογισμό τέτοιων ολοκληρωμάτων θέτουμε σε μια μεταβλητή το «πιο εσωτερικό» ολοκλήρωμα ως προς και το αποτέλεσμα αυτής το θέτουμε με άλλη μεταβλητή μέχρι να φτάσουμε στο «πιο εξωτερικό ολοκλήρωμα.
* Και εδώ προφανώς προσέχουμε τι βαθμού πολυώνυμο έχουμε εφόσον θέλουμε ακριβής τιμή για το ολοκλήρωμα.
* Παράδειγμα: *Χρησιμοποιώντας κατάλληλους τύπους αριθμητικής ολοκλήρωσης να βρεθεί ακριβώς το ολοκλήρωμα*

* + Έστω και .
  + Η είναι πολυώνυμο μέχρι 3ου βαθμού άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε μια από τις μεθόδους που είδαμε στο 6.11.3. Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τον απλό κανόνα 1/3 – Simpson για τον υπολογισμό του .

    - Τιμές της :

* + Άρα
    - Έστω το οποίο είναι πολυώνυμο 3ου βαθμού άρα και πάλι χρησιμοποιούμε τον κανόνα 1/3 – Simpson.
    - Τιμές της :







* + 1. (Θεωρητική) Βρείτε για την οποία το ολοκλήρωμα δεν θα προσεγγιστεί ασυμπτωτικά με σφάλμα από τον Γενικευμένο Κανόνα 1/3 – Simpson.
* Το σφάλμα είναι άρα η πρέπει να είναι τουλάχιστον 4 φορές παραγωγίσιμη στο .
* Αρκεί λοιπόν να επιλέξουμε μια όχι τόσο ομαλή συνάρτηση, π.χ. .
  + 1. (Θεωρητική) Να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει τύπος της μορφής που να βρίσκει ακριβώς το ολοκλήρωμα ενός οποιουδήποτε πολυωνύμου βαθμού .
* Έστω ότι υπάρχει τέτοιος τύπος που βρίσκει ακριβώς το ολοκλήρωμα οποιουδήποτε πολυωνύμου βαθμού .
* Έστω ότι
  + Το πολυώνυμο είναι μη αρνητικό, συνεπώς στο διάστημα : .
  + Όμως που είναι άτοπο!
    1. Έστω ότι έχουμε μια αριθμητική μέθοδο όπου το βήμα διακριτοποίησης, η οποία προσεγγίζει την ακριβή τιμή σύμφωνα με μια δοσμένη σχέση. Για δοσμένα , να χρησιμοποιήσετε την τεχνική Richardson ώστε να βρεθεί μια καλύτερη προσέγγιση του .
* Πρέπει με την τεχνική Richardson να καταλήξουμε σε έναν τύπο σαν αυτό που είδαμε στην θεωρία προσαρμοσμένη στα δεδομένα μας.
* Παράδειγμα: *Μια αριθμητική μέθοδος , όπου το βήμα διακριτοποίησης, προσεγγίζει την ακριβή τιμή σύμφωνα με την σχέση . Αν και να χρησιμοποιήσετε την τεχνική Richardson ώστε να βρεθεί μια καλύτερη προσέγγιση του .*
  + (1)
  + Για θα έχουμε (2)







* + Για :

* + 1. (Θεωρητική) Ολοκλήρωση Romberg με αφετηρία τον Γενικευμένο Κανόνα 1/3 – Simpson.
* Επειδή ο γενικευμένος κανόνας 1/3 – Simpson είναι , ο τύπος του Romberg θα δίνεται ως:

* Χρήση μόνο 3 σημείων και με αύξηση :

* Χρήση προεκβολής Richardson στον 1/3 – Simpson:

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7ο – Αριθμητική Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

1. 1. Επιτρεπτές πράξεις για την επίλυση Γ.Σ.

* Έστω ένα σύστημα εξισώσεων και η οστή εξίσωση αυτού. Οι παρακάτω πράξεις χρησιμοποιούνται ώστε να μετασχηματιστεί ένα Γ.Σ. σε ένα ισοδύναμο που θα λύνεται ευκολότερα.
  + Η εξίσωση μπορεί να πολλαπλασιαστεί με κάθε μη μηδενική σταθερά και η εξίσωση που προκύπτει να είναι ισοδύναμη της :
  + Η εξίσωση μπορεί να πολλαπλασιαστεί με οποιοδήποτε σταθερά να προστεθεί στην και η καινούρια εξίσωση να είναι ισοδύναμη της :
  + Οι εξισώσεις και μπορούν να εναλλάξουν την θέση τους:
  1. Μέθοδος Απαλοιφής Gauss
* Προσπαθεί να μετασχηματίσει τον πίνακα συντελεστών σε ένα ισοδύναμο άνω τριγωνικό πίνακα χρησιμοποιώντας κατάλληλους πολλαπλασιαστές .
* Το δεύτερο μέλος πολλαπλασιάζεται και αυτό με τα . Οι συντελεστές υπολογίζονται από την σχέση , , όπου ο δείκτης είναι η – οστή επανάληψη.
* Αφού φέρουμε το σύστημα στην άνω τριγωνική μορφή τότε με προς τα πίσω αντικαταστάσεις βρίσκουμε τους αγνώστους από το προς το με τον τύπο: .
* Απαιτούμενες πράξεις:
  + Τριγωνοποίηση συστήματος:

* + - πολλαπλασιασμοί

* + - προσθέσεις
  + Προς τα πίσω αντικατάσταση:

* + - πολλαπλασιασμοί

* + - προσθέσεις
  + Συνολικά οι πράξεις που απαιτούνται είναι:

* + - πολλαπλασιασμοί

* + - προσθέσεις
* Απαιτούμενες θέσεις μνήμης:
  + Για να λειτουργήσει αρχικά η μέθοδος θα πρέπει να αποθηκευτεί στην μνήμη του υπολογιστή ο πίνακας και το διάνυσμα.
  + Μια προσεκτική υλοποίηση του αλγορίθμου δείχνει ότι στην συνέχεια δεν χρειάζεται επιπλέον χώρος. Συγκεκριμένα, οι πολλαπλασιαστές μπορούν να αποθηκευτούν στα αυστηρά κάτω τριγωνικό κομμάτι του (εκεί που κανονικά θα υπήρχαν μηδενικά), το άνω τριγωνικό κομμάτι περιλαμβάνει την τριγωνοποίηση του από την μέθοδο και η λύση γράφεται πάνω στο διάνυσμα .
  + Δηλαδή κατά την έξοδο, ο περιέχει την τριγωνοποίηση και τους πολλαπλασιαστές που την πέτυχαν και το την λύση.
    - Κόστος: θέσεις μνήμης
  1. Μέθοδος απαλοιφής Gauss με εναλλαγές γραμμών
* Η διαδικασία της απαλοιφής Gauss μπορεί να τερματιστεί πριν την ολοκλήρωση των βημάτων στην περίπτωση που κάποιο οδηγό στοιχείο γίνει 0.
  + Αυτό μπορεί να συμβεί ακόμα και όταν ο είναι αντιστρέψιμος.
* Το πρόβλημα αυτό μπορεί να προσπεραστεί αν εναλλάξουμε την γραμμή που έχει το οδηγό στοιχείο μηδέν με κάποια από τις παρακάτω της που στην στήλη δεν έχει 0.
  + Όταν ο πίνακας είναι αντιστρέψιμος, τέτοια επιλογή είναι πάντα εφικτή.
* Αν ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος, ενδέχεται όλα τα στοιχεία κάτω από το οδηγό στοιχείο, συμπεριλαμβανομένου και αυτού, να είναι 0. Τότε προχωράμε στο επόμενο βήμα της απαλοιφής Gauss αφού ο στόχος της τριγωνοποίησης έχει επιτευχθεί. Δεν αισιοδοξούμε όμως το σύστημα αυτό να έχει (μοναδική) λύση.
* Πρέπει λοιπόν να βρούμε αν υπάρχει κάποιος ιδανικός, ως προς την αύξηση της ακρίβειας της μεθόδου, τρόπος να επιλέγουμε τις γραμμές που θα εναλλαχτούν. Τέτοιες τεχνικές είναι:
  + Μερική Οδήγηση
  + Μερική Οδήγηση με στάθμιση
  + Ολική οδήγηση
  1. Μερική Οδήγηση
* Στην μερική οδήγηση, το οδηγό στοιχείο σε κάθε βήμα επιλέγεται ως τα απόλυτα μεγαλύτερο στοιχείο της στήλης που βρισκόμαστε από την διαγώνιο και κάτω. Η επιλογή γίνεται με ταυτόχρονη ανταλλαγή γραμμών.
* Στόχος της είναι οι πολλαπλασιαστές να κρατιούνται μικρότεροι της μονάδας και έτσι να αποφεύγεται το γινόμενο του με το στοιχείο του πίνακα να γίνει πολύ μεγαλύτερος από το στοιχείο από το οποίο θα αφαιρεθεί.
* Δίνει ακριβέστερα αποτελέσματα από ότι η απλή απαλοιφή Gauss όταν εφαρμοστούν στο ίδιο πρόβλημα, χωρίς όμως και αυτή να είναι πάντα ευσταθής. Το επιπλέον κόστος πράξεων που προσθέτουμε στην απαλοιφή Gauss με την μερική οδήγηση είναι και έτσι, ασυμπτωματικά, είναι αμελητέο σε σύγκριση με το της μεθόδου. Δεν αυξάνεται όμως το κόστος σε θέσεις μνήμης.
  1. Ολική Οδήγηση
* Στην αρχή του – οστού βήματος της απαλοιφής θεωρεί ως οδηγό στοιχείο το για το οποίο ισχύει . Παρατηρούμε δηλαδή ότι στην ολική οδήγηση δεν αλλάζουμε μόνο γραμμές αλλά και στήλες, όπου αυτό απαιτηθεί.
* Παρατηρήσεις:
  + Η μερική οδήγηση απαιτεί για την εύρεση του οδηγού στοιχείου συγκρίσεις ενώ αυτής της ολικής .
  + Αποδεικνύεται ότι η τεχνική της ολικής οδήγησης, οδηγεί σε πιο ευσταθή αλγόριθμο έναντι της μερικής οδήγησης, όμως εκτός ιδιαίτερων περιπτώσεων, το επιπλέον κόστος πράξεων της, δεν ανταποκρίνεται στην αντίστοιχη βελτίωση που επιτυγχάνει στο αποτέλεσμα σε σχέση με την μερική οδήγηση.
  + Όταν χρειαστεί να αλλάξουμε στήλες, π.χ. την με την () τότε η συνιστώσα της λύσης έχει μεταφερθεί στην – θέση και αντίστροφα.
  1. Μερική Οδήγηση με Στάθμιση
* Έστω ο πίνακας
  + Υπόμνημα:
    - Μερική Οδήγηση:
    - Ολική Οδήγηση:
  + Βρίσκουμε το διάνυσμα όπου , δηλαδή το είναι το μέγιστο απόλυτο στοιχείο της γραμμής (κόστος ).
  + Για να επιλέξουμε ποιο στοιχείο θα πάει στην θέση, συγκρίνουμε όχι τα αλλά τα . Έστω η θέση όπου .
    - Τότε αλλάζουμε την γραμμή με την 1η.
    - Αλλάζουμε ταυτόχρονα και το με το στο διάνυσμα .
* Γενικά:
  + Αρχικοποίηση με .
  + Μηδενισμός των απαραίτητων στοιχείων της – οστής στήλης.
  + Επιλέγουμε την γραμμή για την οποία το είναι μέγιστο. Έστω αυτή η τιμή.
    - Άλλαξε την γραμμή με την .
    - Άλλαξε την θέση των στο .
    - Κάνε απαλοιφή Gauss για την γραμμή.
* Πότε προτιμάται:
  + Όπως στην μερική και την ολική οδήγηση, έτσι και εδώ δεν αλλάζουμε τις γραμμές. Αντί αυτής της δαπανηρής διαδικασίας για τον Η/Υ δημιουργούμε ένα διάνυσμα δείκτη, π.χ το και κάθε φορά που χρειάζεται να αλλάξουμε την θέση δύο γραμμών, έστω της με την , αλλάζουμε την με την συνιστώσα του . Έτσι στο τέλος της διαδικασίας έχουμε πλήρη έλεγχο της πραγματικής θέσης κάθε γραμμής στην τριγωνοποίηση.
  + Προτιμάται έναντι της μερικής οδήγησης συνήθως όταν τα στοιχεία του αρχικού πίνακα , εμφανίζουν σε όλες ή σε κάποιες γραμμές του μεγάλη διακύμανση κατά απόλυτη τιμή.
  1. Υλοποίηση των μεθόδων οδήγησης
* Προφανώς στην υλοποίηση των τεχνικών αυτών στον Η/Υ δεν αλλάζουμε γραμμές ή/και στήλες (ολική οδήγηση). Αντί αυτού, προσθέτουμε ένα διάνυσμα δείκτη όποτε χρειαστεί αλλαγή γραμμών π.χ. της με την τότε αλλάζουμε τα συγκεκριμένα στοιχεία του .
  1. Εφαρμογές της μεθόδου της απαλοιφής Gauss (PLU)

1. Παραγοντοποίηση LU:
   * Η ιδέα της LU παραγοντοποίησης είναι να παραγοντοποίησει τον πίνακα του συστήματος σε τέτοιας μορφής πίνακες για τους οποίους μπορούμε να τους λύσουμε «γρήγορα» (κάτω από ) συστήματα με αυτούς ως πίνακες συντελεστών
   * Τέτοιοι είναι οι άνω και κάτω τριγωνικοί πίνακες. Πιο συγκεκριμένα, με την προϋπόθεση ότι ο πίνακας έχει όλες τις κύριες υποορίζουσες του διαφορές του 0, υπάρχουν κάτω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία 1 και άνω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία διάφορα του 0, ώστε ο πίνακας να γράφεται ως .
   * Επίλυση συστημάτων:
     + .
     + Θέτουμε και έχουμε την εξίσωση .
       1. Λύνουμε το σύστημα ως προς με προς τα εμπρός αντικαταστάσεις.
       2. Λύνουμε το σύστημα ως προς με προς τα πίσω αντικαταστάσεις.
   * PLU:
     + Όπως στην περίπτωση της απαλοιφής Gauss χωρίς οδήγηση έτσι και τώρα η παραγοντοποίηση LU μπορεί να αποτύχει ακόμα και όταν ο είναι αντιστρέψιμος.
     + Αν όμως εφαρμόσουμε την τεχνική της οδήγησης τότε λαμβάνουμε την μορφή όπου ο πίνακας είναι μεταθετικός, δηλαδή κάποια αναδιάταξη των γραμμών του μοναδιαίου πίνακα.
     + Η μέθοδος αυτή εφαρμόζεται πάντα ακόμα και στην περίπτωση που ο είναι μη αντιστρέψιμος ή και μη τετραγωνικός, φυσικά τότε ο , παύει να έχει όλα τα διαγώνια στοιχεία του μη μηδενικά.
2. Εύρεση της ορίζουσας του :

* + - και συγκεκριμένα όπου το πλήθος των αλλαγών γραμμών που έγιναν στον .

* + - , γιατί είναι κάτω τριγωνικός με διαγώνια στοιχεία το 1 και ορίζουσα ενός άνω (ή κάτω) τριγωνικού πίνακα είναι το γινόμενο των διαγωνίων.
  + Συνεπώς:

1. Εύρεση αντίστροφου :
   * Κάνουμε PLU ανάλυση στον ( πράξεις) και μετά λύνουμε συγκεκριμένα συστήματα της μορφής με (παντού 0 εκτός από την θέση / στήλη του μοναδιαίου οπότε ο είναι ο διότι:
2. Εύρεση του πλήθους των γραμμικά ανεξαρτήτων γραμμών στηλών ():
   * Υλοποιώντας την PLU, το πλήθος των μηδενικών στοιχείων είναι το .
   1. Παραγοντοποίηση Cholesky

* Αν ο είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε όπου ο είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία ( άνω τριγωνικός).
* Ορισμός θετικά ορισμένου πίνακα (Διάφοροι ισοδύναμοι ορισμοί):
  + Ένας συμμετρικός πίνακας όταν ισχύει .
  + Όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικές και θετικές.
  + Όλες οι κύριες υποορίζουσες του είναι θετικές:
    - όπου οι κύριες υποορίζουσες .
  + Αν ολοκληρώνεται η ανάλυση Cholesky, ο οφείλει να είναι θετικά ορισμένος.
* Η μέθοδος ποτέ δεν χρειάζεται οδήγηση.
* Η παραγοντοποίηση Cholesky χρειάζεται τα μισά flops από ότι η LU. Επιπλέον, επειδή δεν χρειάζεται οδήγηση, η ταχύτητα εκτέλεσης της θα είναι κάτι παραπάνω από διπλάσια σε σχέση με την LU.
* Αλγόριθμος Cholesky:

Εικόνα που περιέχει κείμενο

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

* Συνηθισμένη περίπτωση για πίνακα :

με

* + Υπολογισμοί του :

* 1. Πολυπλοκότητες μεθόδων για πίνακες
* Απαλοιφή Gauss / LU με μερική οδήγηση:
* LU με ολική οδήγηση:
* Ανάλυση Cholesky:
* Μέθοδος Cramer:
* Τριγωνικός Πίνακας (προς τα πίσω / προς τα εμπρός αντικαταστάσεις):
  1. Διάφορα Θέματα
     1. Χρήση του αλγορίθμου Cholesky για την απόδειξη ότι ο πίνακας είναι μη αντιστρέψιμος
* Χρησιμοποιούμε την ανάλυση Cholesky και έπειτα βρίσκουμε την ορίζουσα του μέσω του τύπου .
* Εφόσον η ορίζουσα ισούται με 0, ο είναι μη αντιστρέψιμος.
  + 1. Εύρεση στήλης αντιστρόφου του πίνακα .
* Οδηγίες (έστω ότι έχουμε έναν πίνακα μεγέθους ):
  + Κάνουμε την ανάλυση LU ή PLU ή Cholesky στον πίνακα για να τον φέρουμε στην μορφή ή ή αντίστοιχα.
  + Έστω ότι έχουμε τον μοναδιαίο πίνακα μεγέθους , δηλαδή τον .

όπου , η – οστή στήλη του και η – οστή στήλη του μοναδιαίου .

* + Παίρνουμε την ανάλυση που έχουμε κάνει και αντικαθιστούμε στην .
    - Για παράδειγμα, αν έχουμε την ανάλυση τότε η αντικατάσταση στο γίνεται:

* + Λύνουμε την νέα εξίσωση/σύστημα με την στήλη που θέλουμε.
    - Προσέχουμε την ύπαρξη του πίνακα ο οποίος μπορεί να αλλάξει τις θέσεις των και του και έτσι να αλλάξουν τα δεδομένα της εξίσωσης.
    - Από την νέα εξίσωση, πρέπει να καταλήξουμε σε περισσότερες απλούστερες. Για παράδειγμα το παράδειγμα του , γίνεται: , όπου λύνουμε πρώτα την 2η εξίσωση και μετά την 1η.
* Παράδειγμα: *Αφού κάνετε την ανάλυση στον πίνακα*

*να βρεθεί η 1η στήλη του .*

* + Έστω πως χρησιμοποιούμε την μερική οδήγηση για την ανάλυση .
  + Αρχικά .
  + 1η επανάληψη:
    - άρα έχουμε εναλλαγή γραμμών .
    - Εύρεση των συντελεστών:

* + - :

* + - :

* + - Εύρεση των :

Επίσης μπορούμε να το εκφράσουμε ως:

* + 2η επανάληψη:

* + - άρα δεν έχουμε εναλλαγή.
    - Εύρεση των συντελεστών:

* + - :

* + - Εύρεση των :

Επίσης

* + Τελικά:



* + Εύρεση 1ης στήλης :











* + - Άρα η 1η στήλη του είναι η:
    1. Εύρεση γραμμής του αντιστρόφου του .
* Οδηγίες (έστω ότι έχουμε έναν πίνακα μεγέθους ):
  + Κάνουμε την ανάλυση LU ή PLU ή Cholesky στον πίνακα για να τον φέρουμε στην μορφή ή ή αντίστοιχα.
  + Έστω ότι έχουμε τον μοναδιαίο πίνακα μεγέθους , δηλαδή τον .

όπου , η – οστή γραμμή του και η – οστή γραμμή του μοναδιαίου .

* + Παίρνουμε την ανάλυση που έχουμε κάνει και αντικαθιστούμε στην .
    - Έστω ότι κάναμε ανάλυση Cholesky ()
    - ,
  + Λύνουμε την νέα εξίσωση/σύστημα με την γραμμή που θέλουμε.
    - Προσέχουμε την ύπαρξη του πίνακα ο οποίος μπορεί να αλλάξει τις θέσεις των και του και έτσι να αλλάξουν τα δεδομένα της εξίσωσης (τις θέσεις των .
    - Από την νέα εξίσωση, πρέπει να καταλήξουμε σε περισσότερες απλούστερες. Για παράδειγμα το παράδειγμα του , γίνεται: , όπου λύνουμε πρώτα την 2η εξίσωση και μετά την 1η.
* Παράδειγμα: *Δίνεται ο πίνακας:*

*Να γίνει η ανάλυση Cholesky σε αυτόν και έπειτα να βρείτε την 3η γραμμή του .*











* + Τελικά:
  + Εύρεση της 3ης γραμμής του :

**Σε αυτό το είδος πολλαπλασιασμού**

**πινάκων πολλαπλασιάζουμε τις γραμμές**

**του 1ου πίνακα με τις στήλες του 2ου πίνακα.**







* + - Άρα η 3η γραμμή του είναι η:

* + 1. Να βρεθεί μια παράμετρος (ή παράμετροι) ώστε ο πίνακας να έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές / Δυνατές τιμές μιας παραμέτρου.
* Παρατηρούμε ότι ο πίνακας είναι συμμετρικός ⇔ Ένας συμμετρικός πίνακας που έχει θετικές ιδιοτιμές είναι θετικά ορισμένος ⇔ Ένας πίνακας είναι θετικά ορισμένος αν ολοκληρώνεται με την ανάλυση Cholesky.
* Αν η παράμετρος βρίσκεται στην διαγώνιο τότε πρέπει σίγουρα η τιμή του να είναι .
* Αν όμως η παράμετρος βρίσκεται σε άλλη θέση πέρα της διαγωνίου πρέπει να εργαστούμε με ορίζουσες (θετικά ορισμένος ⇔ όλες οι κύριες υποορίζουσες του είναι θετικές).
  + Εδώ πρέπει να βρούμε τις διαφορετικές τιμές του
* Παράδειγμα: *Να βρεθούν όλες οι πιθανές τιμές του ώστε ο πίνακας:*

*να έχει όλες τις ιδιοτιμές του θετικές*.

* + Ο είναι θετικά ορισμένος άρα έχει όλες τις κύριες υποορίζουσες του θετικές.

Άρα

* + 1. Να γραφτεί ο πίνακας σε μορφή όπου κάτω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία μονάδα.
* Συνήθως ακολουθείται μετά από την ανάλυση Cholesky που κάνουμε στον πίνακα .
* Για να τον φέρουμε στην μορφή εκτελούμε τις παρακάτω πράξεις:

* + (ο πίνακας θα είναι διαγώνιος, δηλαδή μόνο στην διαγώνιο θα παίρνει τιμές και σε όλες τις υπόλοιπες θέσεις μηδενίζεται).

* Παράδειγμα: *Δίνεται ο πραγματικός συμμετρικός πίνακας*

*i) Να γίνει η ανάλυση Cholesky στον .*

*ii) Να γραφεί ο στην μορφή όπου κάτω τριγωνικός πίνακας με διαγώνια στοιχεία ίση με την μονάδα.*

**i)**











* + Άρα:

**ii)**

* + και :

* + Οπότε:
    1. Διάφοροι αλγόριθμοι και περιπτώσεις υπολογισμών πινάκων.
  + Παράδειγμα 1: *Έστω γραμμικό σύστημα , όπου ο είναι κάτω τριγωνικός πίνακας με μη μηδενικά στοιχεία μόνο στις πρώτες υποδιαγώνιες του. Να γράψετε αλγόριθμο που θα λύνει το παραπάνω σε πράξεις.*
    - Το σύστημα είναι ειδική περίπτωση κάτω τριγωνικού. Τα τριγωνικά (άνω ή κάτω) συστήματα απαιτούν πράξεις.
    - Αλγόριθμος:

Εικόνα που περιέχει κείμενο

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

* + Παράδειγμα 2: *Να περιγραφεί οικονομικός τρόπος υπολογισμού, από πλευράς πράξεων και θέσεων μνήμης, των διανυσμάτων και , όπου , , αντιστρέψιμος τριδιαγώνιος πίνακας, άνω τριγωνικός πίνακας και τυχαίο διάνυσμα. Ποιο είναι το ασυμπτωτικό κόστος των πράξεων;*

* + - :

* + - * Έστω ότι χρησιμοποιούμε παραγοντοποίηση για να λύνουμε το σύστημα.
      * Βρίσκουμε το και στην συνέχεια θέτουμε με παρόμοιο τρόπο , βρίσκουμε από την ανάλυση με επιπλέον πράξεις το και με άλλη μια εφαρμογή λύνουμε το , επίσης με πράξεις.
      * Επειδή ο είναι τριδιαγώνιος, η ανάλυση απαιτεί πράξεις και χώρο αποθήκευσης.
    - :
      * Υπολογίζουμε πρώτα το ως εξής:

* + - * + , λύνουμε το σύστημα με κόστος πράξεις και θέσεις μνήμης.
      * Κάνουμε τον πολλαπλασιασμό που κοστίζει πράξεις και θέσεις μνήμης.
  + Παράδειγμα 3: Έστω ο πίνακας ο οποίος μπορεί να γραφεί ως: όπου οι πίνακες . Αν ο είναι άνω τριγωνικός, ο κάτω τριγωνικός και ο διαγώνιος, να δείξετε πως η λύση του συστήματος , μπορεί να βρεθεί με πράξεις.
    - Θέλουμε να λύσουμε το σύστημα:

Συνεπώς έχουμε

* + - * Λύνουμε το πρώτο μέλος () με προς τα πίσω αντικαταστάσεις το οποίο απαιτεί πράξεις. Έτσι βρίσκουμε το .
      * Στο δεύτερο μέλος () πολλαπλασιάζουμε το (που απαιτεί πράξεις) και στην συνέχεια με προς τα εμπρός αντικαταστάσεις ( πράξεις) βρίσκουμε το με την σχέση .
    - Το σύνολο λοιπόν είναι πράξεις.
  + Παράδειγμα 4: *Να περιγράψετε αποτελεσματικό αλγόριθμο (με λιγότερες από ( πράξεις) που θα λύνει συστήματα όπου ο είναι αντιστρέψιμος και έχει την μορφή:*

*Ποιο είναι το ασυμπτωτικό κόστος των πράξεων του προτεινόμενου αλγόριθμου*;

* + - Παρατηρούμε ότι κάτω από την κύρια διαγώνιο μόνο ένα στοιχείο υπάρχει για μηδενισμό, οπότε το δεύτερο loop του αλγορίθμου απαλοιφής Gauss (ή ) μπορεί να παραληφθεί.
    - Αλγόριθμος Modified LU:

for to do

for to do

end

end

* + - Ο παραπάνω αλγόριθμος εκτελείται με πράξεις.
  + Παράδειγμα 5: *Να τροποποιηθεί κατάλληλα ο αλγόριθμος της LU ανάλυσης με μερική οδήγηση, ώστε να παραγοντοποιεί τριδιαγώνιους πίνακες της μορφής:*

Εικόνα που περιέχει κείμενο

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

*με πράξεις*.

* Αλγόριθμος Tridiagonal-LU:

Εικόνα που περιέχει κείμενο

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

* + 1. Υπολογισμός χρόνου επίλυσης συστημάτων
* Παράδειγμα 1: *Έστω ότι ένας υπολογιστής χρειάζεται 0.002 δευτερόλεπτα για να εκτελέσει την αντικατάσταση σε έναν τριγωνικό πίνακα ενός συστήματος . Να εκτιμηθεί ο χρόνος που χρειάζεται για την επίλυση ενός συστήματος.*
  + Ο υπολογιστής χρειάζεται γενικά πράξεις για την αντικατάσταση.
    - Άρα πράξεις σε δευτερόλεπτα οπότε:

(1)

* + Η απαλοιφή Gauss (υπονοοείται γενικά στο ερώτημα) χρειάζεται πράξεις.
    - Άρα (2)
  + Οπότε
* Παράδειγμα 2: *Γνωρίζουμε ότι ένας υπολογιστής μπορεί να επιλύσει 200 άνω τριγωνικά συστήματα διάστασης σε 1 δευτερόλεπτο. Να εκτιμήσετε τον χρόνο που θα χρειαστεί να λυθεί στον ίδιο υπολογιστή ένα τυχαίο σύστημα, όχι τριγωνικό, διάστασης* .
  + Ο υπολογιστής εκτελεί πράξεις σε 1 δευτερόλεπτο.
  + Άρα για 200 συστήματα: πράξεις. (1)
  + Η επίλυση τυχαίου συστήματος απαιτεί πράξεις άρα: πράξεις. (2)
  + Τελικά δευτερόλεπτα.
* Παράδειγμα 3: *Σε έναν υπολογιστή, η παραγοντοποίηση LU με μερική οδήγηση ενός πίνακα χρειάστηκε 5 sec. Πόσα περίπου άνω τριγωνικά συστήματα ίδιας διάστασης μπορούν να λυθούν σε 1 sec;*
  + Η ανάλυση LU με μερική οδήγηση απαιτεί πράξεις.
    - Σε 5 sec γίνονται:

.

* + - Σε 1 sec γίνονται . (1)
  + Η επίλυση άνω τριγωνικού συστήματος απαιτεί πράξεις:

* + - . (2)
    - Θέλουμε να βρούμε πόσα συτήματα μπορούμε να λύσουμε, άρα: .

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8ο – Προβλήματα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ) για Συνήθεις Διαφορικές Εξισώσεις (ΣΔΕ)

1. 1. Προβλήματα Αρχικών Τιμών (ΠΑΤ)

* Έστω μια συνάρτηση και . Το τυπικό πρόβλημα είναι το εξής:
  + Ζητείται μια συνάρτηση τέτοια ώστε:
  + Κάθε συνάρτηση για την οποία ισχύει η προηγούμενη διαφορική εξίσωση μαζί με την αρχική συνθήκη ονομάζεται λύση του ΠΑΤ.
  + Ένα ΠΑΤ μπορεί αν έχει καμία, μία ή πολλές λύσεις.
* Παραδείγματα:
  + Το πρόβλημα
    - Eχει μοναδική λύση στο την
    - Δεν έχει λύση στο καθώς για ισχύει ότι .
  + Το πρόβλημα έχει πολλές λύσεις. Δύο από αυτές είναι οι:

* 1. Ύπαρξη και Μοναδικότητα
* Θεώρημα: Έστω μια συνάρτηση η οποία πληροί την συνθήκη του Lipschitz ως προς ομοιόμορφα ως προς , δηλαδή: .
  + Τότε για κάθε το ΠΑΤ λύνεται μονοσήμαντα.
  + Να σημειωθεί ότι αυτή η τοπική συνθήκη Lipschitz, δίνει ύπαρξη και μοναδικότητα σε ένα υποδιάστημα του (π.χ. ) και όχι σε όλο το .
* Θεώρημα: Έστω και . Αν η πληροί στο την συνθήκη του Lipschitz ως προς ομοιόμορφα ως προς δηλαδή

τότε το ΠΑΤ λύνεται μονοσήμαντα τουλάχιστον στο διάστημα με

* + Η συνέχεια της στο διάστημα εξασφαλίζει την ύπαρξη σε κάποιο διάστημα , αλλά γενικά δεν εξασφαλίζει την μοναδικότητα.
  1. Απλή Μέθοδος Euler
* Έστω το πρόβλημα . Ο αλγόριθμος της μεθόδου ορίζεται ως:

όπου οι προσεγγίσεις των ακριβών τιμών και .

* Το τοπικό σφάλμα αποκοπής της μεθόδου είναι και το ολικό σφάλμα .
* Απόδειξη:
  + Θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα του Taylor για να καταλήξουμε στα παραπάνω αποτελέσματα.
  + Έστω ότι η λύση του ΠΑΤ, έχει 2 παραγώγους (συνεχείς) στο ώστε για κάθε .

για κάποιο αριθμό στο .

* + Επειδή έχουμε

και επειδή το ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση έχουμε

* + Το υπόλοιπο αποδεικνύει το γεγονός ότι το σφάλμα αποκοπής είναι . Αν υποθέσουμε ότι το είναι η ακριβής τιμή τότε η επόμενη της περιέχει σφάλμα αυτής της τάξης.
  + Για το ολικό σφάλμα παρατηρούμε ότι γενικά κάνουμε βήματα για να φτάσουμε στο και άρα τα σφάλματα συσσωρεύονται κατά ρίχνοντας πάντα την τάξη του τοπικού σφάλματος κατά 1. Γι’ αυτό και πρέπει η τάξη της να είναι .
* Παράδειγμα: Θεωρούμε το ΠΑΤ
  + Το ΠΑΤ έχει την λύση .
  + Η μέθοδος Euler για τον ομοιόμορφο διαμερισμό , , δίνει την ακολουθία :

δηλαδή την

* + Δίνοντας διαδοχικά τιμές στην () βρίσκουμε κάθε φορά τις προσεγγίσεις στο σημείο .
  + Σφάλματα:
  + Παρατηρώντας τον παρακάτω πίνακα των προσεγγίσεων και το σφαλμάτων:

Εικόνα που περιέχει πίνακας

Περιγραφή που δημιουργήθηκε αυτόματα

επιβεβαιώνουμε την θεωρία ότι όσο το βήμα υποδιπλασιάζεται το σφάλμα προσέγγισης της ακριβούς τιμής υποδιπλασιάζεται.

* 1. Ευστάθεια
* Θεωρούμε το απλό ΠΑΤ: το οποίο έχει λύση την η οποία φθίνει εκθετικά προς το 0 καθώς .
  + Με την χρήση της μεθόδου του Euler παράγεται η παρακάτω ακολουθία:

όταν και .

* + Πρακτικά οι υπολογισμοί γίνονται για κάποιο μικρό θετικό οπότε πρέπει να ισχύουν τα παρακάτω:

* + - εφόσον

* + - εφόσον

* + - εφόσον
  + Παρατηρούμε ότι οι προσεγγίσεις μιμούνται την συμπεριφορά της λύσης μόνο όταν , δηλαδή όταν .
* Ορισμός Ευστάθειας: Μια μέθοδος για την επίλυση ΠΑΤ ονομάζεται απόλυτα ευσταθής για κάποιο , αν, όταν εφαρμοσθεί στο πρόβλημα , δίνει προσεγγίσεις οι οποίες τείνουν στο 0 καθώς . Το διάστημα της μορφής για το οποίο η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής όταν λέγεται διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου.
  + Αν τότε πρέπει να επιλεγεί πολύ μικρό .
  1. Ευστάθεια Αριθμητικών Μεθόδων
* Μια μέθοδος για την επίλυση Π.Α.Τ. ονομάζεται απόλυτα ευσταθής για κάποιο αν, όταν εφαρμοστεί στο πρόβλημα: δίνει προσεγγίσεις , οι οποίες τείνουν στο 0, καθώς το τείνει στο άπειρο.
  + Το διάστημα της μορφής για το οποίο η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής όταν λέγεται διάστημα απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου.
* Συμπεραίνουμε ότι αν τότε πρέπει να επιλεχθεί πολύ μικρό , κάτι που αποτελεί ένα κύριο μειονέκτημα της μεθόδου, ειδικά σε άκαμπτα προβλήματα.
  1. Η σημασία της ευστάθειας
* Έστω ότι σε κάποιο βήμα της μεθόδου Euler υπολογίζουμε, λόγω σφαλμάτων στρογγυλοποίησης, τον αριθμό αντί τον αριθμό και έστω ότι από κει και πέρα, οι πράξεις εκτελούνται ακριβώς. Αντί δηλαδή της ακολουθίας την οποία θα έδινε η μέθοδος Euler, παίρνουμε την ακολουθία η οποία ορίζεται ως: οπότε .
* Συνεπώς, αν το ανήκει στην περιοχή απόλυτης ευστάθειας της μεθόδου, τότε η διαταραχή δεν θα έχει σοβαρές επιπτώσεις, επειδή η μεταβολή αποσβένεται καθώς αυξάνεται το .
* Αν το , τότε το σφάλμα που έγινε στο βήμα, θα βρεθεί αναλλοίωτο στο βήμα, ενώ αντιθέτως αν το είναι εκτός της περιοχής απόλυτης ευστάθειας, θα έχει καταστροφική επίπτωση στα αποτελέσματα που θα λάβουμε.
  1. Πεπλεγμένη Euler
* Αν προσεγγίσουμε την παράγωγο με την παράσταση αντί της που οδηγεί στην απλή Euler, τότε λαμβάνουμε το πεπλεγμένο σχήμα: και .
* Για την προσέγγιση του του δεξιού μέλους, εκτελούμε λίγα βήματα με κάποια επαναληπτική μέθοδος εύρεσης ρίζας (π.χ. Newton – Raphson) στο σχήμα με .
* Εφαρμόζοντας την μέθοδο αυτή στο πρόβλημα δοκιμής , διαπιστώνουμε ότι:

* + από όπου συμπεραίνουμε ότι η μέθοδος είναι απόλυτα ευσταθής για κάθε αφού πάντα .
  + Τέτοιες μέθοδοι ονομάζονται Α-ευσταθείς. Η τάξη ακριβείας της μεθόδου παραμένει ίση με 1, όσο και της απλής Euler.
  1. H Μέθοδος του Μέσου
* Η προσέγγιση είναι .
  + Άρα στο σημείο θα ισχύει: οπότε από την διαφορική εξίσωση θα έχουμε:

* Η αριθμητική μέθοδος που παράγεται, παρουσιάζει την δυσκολία του υπολογισμού της τιμής την οποία δεν γνωρίζουμε. Αν την προσεγγίζουμε μέσω του αναπτύγματος Taylor τότε:

* Οι δύο τελευταίες ισότητες δίνουν:

από ‘που λαμβάνουμε το σχήμα:

το οποίο ονομάζεται άμεσο σχήμα του μέσου.

* Αν πάλι προσεγγίσουμε το από την ενδιάμεση τιμή τότε λαμβάνουμε την που ονομάζεται πεπλεγμένη μέθοδος του μέσου.
* Εφόσον η είναι 2 φορές παραγωγίσιμη, τότε και οι δύο μέθοδοι έχουν ολικό σφάλμα αλλά δεν είναι Α-ευσταθείς.
  1. Πεπλεγμένη Μέθοδος του Τραπεζίου
* Αν στην γενική εξίσωση ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη στο διάστημα ] λαμβάνουμε

* Χρησιμοποιώντας τον Κανόνα του Τραπεζίου για το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους καταλήγουμε στον τύπο:

ο οποίος ονομάζεται πεπλεγμένος κανόνας του τραπεζίου.

* Η μέθοδος αυτή έχει ταχύτητα σύγκλισης και είναι Α-ευσταθής.
  1. Βελτιωμένη Μέθοδος Euler
* Ορίζεται από τον αλγόριθμο όπου:
* Δηλαδή σε κάθε βήμα χρησιμοποιείται μια πρόβλεψη , η οποία υπολογίζεται από την τελευταία εξίσωση και στην συνέχεια βελτιώνεται από την αρχική.
* Στην πράξη:

1. Υπολογίζουμε πρώτα το .
2. Μετά το το οποίο το συμβολίζουμε ως .
3. Στην συνέχεια υπολογίζουμε το .
4. Τέλος, υπολογίζουμε το

* H μέθοδος αυτή προφανώς έχει ανά επανάληψη μεγαλύτερο υπολογιστικό κόστος απ΄ ότι η απλή μέθοδος Euler αλλά μικρότερο από την πεπλεγμένη.
* Η τάξη ακριβείας της μεθόδου είναι 2, δηλαδή . Όμως, δεν είναι ευσταθής σε όλο το αριστερό ημιάξονα της πραγματικής ευθείας όπως η πεπλεγμένη του τραπεζίου, αλλά σε ένα μεγαλύτερο διάστημα από αυτό της απλής Euler.
  1. Διάφορα Θέματα
     1. Να αποδείξετε ότι η Μέθοδος του Τραπεζίου είναι Α-ευσταθής

* (1)

* (2)
* Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε:

…

* Θέλουμε που ισχύει για κάθε , με άρα η Μέθοδος του Τραπεζίου είναι Α-ευσταθής.

* + 1. Να αποδείξετε ότι η Απλή Μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής στο
* Έστω το απλό γραμμικό Π.Α.Τ. το οποίο έχει την λύση η οποία τείνει στο 0 εκθετικά καθώς .
* Εφαρμόζουμε την Απλή Μέθοδο Euler:

…

* + Οπότε

δηλαδή το οποίο τείνει στο όταν

* , αν αν

, αν

, αν

* Άρα η Απλή Μέθοδος Euler είναι απόλυτα ευσταθής για

και το διάστημα ευστάθειας είναι το

* + 1. Εφαρμογή Μεθόδου για επίλυση Π.Α.Τ. και στην συνέχεια με δοσμένη αναλυτική λύση αυτής να βρεθεί το σφάλμα καθώς και να εκτιμηθεί πόσο πρέπει να μικρύνει το h ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο μιας τιμής tol;
* Παράδειγμα: *Δίνεται το Π.Α.Τ. .*

*a) Με βήμα να προσεγγιστεί το με την Βελτιωμένη Μέθοδο Euler.*

*b) Αν η αναλυτική λύση της εξίσωσης είναι η , να βρείτε το σφάλμα που έγινε από την μέθοδο.*

*c) Να εκτιμήσετε πόσο (περίπου) πρέπει να μικρύνει το ώστε το σφάλμα να είναι μικρότερο από .*

1. 1η επανάληψη / , ,



2η επανάληψη / , ,







1. Πραγματική Τιμή και Σφάλμα:
   * *Πραγματική Τιμή*:

* + *Σφάλμα*:

1. Η βελτιωμένη μέθοδος Euler είναι μέθοδος 2ης τάξης, δηλαδή το φθίνει ως .
   * Συνεπώς: